
14
8
200
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE • FIRENZE •

COURS
D'ANALYSE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

COURS
D'ANALYSE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. CH. HERMITE,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A LA FACULTÉ DES SCIENCES

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

	Pages.
Fonctions rationnelles	2
Fonctions algébriques	9
Des variables imaginaires dans l'étude des fonctions	22
De l'exponentielle et des fonctions circulaires	32
De la périodicité dans les fonctions circulaires	41

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIERS PRINCIPES.

Série de Taylor	47
Remarques sur le développement des fonctions par la formule de Maclaurin	58
Différentielles des fonctions d'une variable	65
Différentielle du premier ordre	65
Différentielles d'un ordre quelconque	73
Différentielles partielles et différentielles totales	78
Changement de la variable indépendante	82

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Pages

Préliminaires........ 90
Dérivée de l'aire d'une courbe plane........ 98
Notions de l'intégrale définie........ 99
Dérivée d'un arc de courbe........ 101

Du contact géométrique........ 104
Contact des courbes planes........ 104
Contact des courbes dans l'espace........ 116
Contact d'une courbe et d'une surface........ 130
Contact des surfaces........ 139

De la courbure........ 150
Courbes planes........ 150
Courbes dans l'espace........ 166

Surfaces........ 181

Courbes et surfaces enveloppes........ 191

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

Formes indéterminées de certaines fonctions pour des valeurs particulières de la variable........ 199
Maxima et minima........ 204

Formation des équations différentielles........ 207
Équations différentielles ordinaires........ 207
Équations aux différences partielles........ 215

CALCUL INTÉGRAL.

PREMIERS PRINCIPES.

Remarques préliminaires sur la notion d'intégrale définie........ 231

Intégration par substitution........ 240
Notions sur les courbes unicursales........ 240
Intégration par parties........ 256

Intégration des fonctions rationnelles........ 261

Pages.

De l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ 270

Des intégrales définies $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$ 280

Intégration des fonctions algébriques qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme 290

De l'intégrale $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ 297

Des intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$ ... 306

Applications 314

Intégration des fonctions transcendantes 320

De l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ 321

De l'intégrale $\int e^{ax} f(x)\,dx$ 352

De l'intégrale $\int e^{ax} f(\sin x, \cos x)\,dx$ 361

De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin x, \cos x) f_1(x)\,dx$ 366

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Remarques préliminaires 381

Quadrature des courbes planes 389

Courbes du second degré; cycloïde 389

Courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre 401

Rectification des courbes 410

Parabole et ellipse 410

Des courbes algébriques dont l'arc s'exprime par la fonction elliptique de première espèce 416

Des fonctions algébriques dont l'intégrale est réductible aux transcendantes elliptiques 421

Volumes des corps limités par des surfaces quelconques 428

Quadrature des surfaces courbes quelconques 434

Volume et surface des corps de révolution 436

Évaluation approchée des intégrales 439

COURS
D'ANALYSE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

Les éléments des Mathématiques présentent deux divisions bien tranchées : d'une part, l'Arithmétique et l'Algèbre; de l'autre, la Géométrie. Rien de plus différent, à leur début, que les considérations et les méthodes propres à ces deux parties d'une même science, et, bien qu'associées dans la Géométrie analytique, elles restent essentiellement distinctes si loin qu'on les poursuive, et paraissent se rapporter à des aptitudes et à des tendances intellectuelles spéciales. Ce double point de vue de l'Algèbre et de la Géométrie se retrouve dans le Calcul différentiel et le Calcul intégral; on peut dire en effet de ces nouvelles branches de Mathématiques qu'elles sont comme une Algèbre plus vaste et plus féconde, appliquées à des questions de Géométrie inaccessibles au Calcul élémentaire, telles que la quadrature des courbes, la détermination des volumes limités par des surfaces quelconques, la rectification des courbes planes ou gauches, etc.

Cet aperçu ne justifie point au premier abord la dénomina-

tion, souvent employée, de *Calcul infinitésimal*, qui semble annoncer une étude et une science de l'infini, résultant d'un rôle plus étendu de cette notion que dans les éléments. En réalité, le rôle de l'infini, dans ces régions élevées des Mathématiques, est en entier résumé dans un petit nombre de propositions du caractère le plus simple, et telles qu'on pourrait les énoncer et les démontrer dès le commencement de la Géométrie. C'est l'application répétée de ces mêmes propositions qui constitue ce qu'on nomme la *méthode infinitésimale*, méthode qui sera bientôt exposée, et dont il sera donné dans ce Cours de nombreux exemples. Mais, dès à présent, nous devons dire qu'en se montrant de plus en plus féconde la notion de l'infini reste toujours simplement la notion d'une grandeur supérieure à toute grandeur donnée, et que les conditions de son emploi restent toujours celles des éléments de la Géométrie. Autant que peut le donner un premier aperçu, l'objet de ces leçons est donc une continuation de l'Algèbre, en y joignant quelques principes très-élémentaires sur l'infini, qui conduisent à résoudre par le calcul les questions de Géométrie dont il a été parlé précédemment. Avant d'entrer en matière, il est donc naturel de jeter un coup d'œil sur l'Algèbre, afin de ne laisser aucune solution de continuité entre ce cours et l'enseignement qui l'a précédé.

Je rappellerai d'abord qu'on a commencé par étendre aux quantités littérales les opérations ordinaires de l'Arithmétique, addition, soustraction, multiplication et division. On traite ensuite de la résolution des équations et systèmes d'équations du premier degré, et l'on aborde enfin les équations de degré quelconque. Or, à propos de la division algébrique, apparaît déjà la considération toute spéciale des polynômes ordonnés par rapport aux puissances d'une variable, dont l'étude, plus approfondie, constitue précisément ce qu'on nomme la *théorie générale des équations*. Les éléments d'Algèbre ont donc pour principal objet les propriétés des fonctions rationnelles et entières d'une variable, et ils conduisent ainsi à l'*Analyse*, c'est-à-dire à l'étude générale des fonctions. Ce qui concerne la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues se rattache d'ailleurs au même point de

vue, car alors on ne fait au fond qu'établir certaines propriétés d'un système de fonctions linéaires de plusieurs variables. Mais ici il importe de rendre parfaitement clair ce qu'on entend dire par *étude générale des fonctions.*

Il a été question tout à l'heure de polynômes; or les éléments conduisent encore à d'autres expressions qu'on nomme transcendantes, par exemple l'exponentielle et le logarithme, et en second lieu le sinus, le cosinus, la tangente d'un arc. Les premières sont étudiées en Algèbre même, et les autres sont le sujet de la Trigonométrie, qui n'est visiblement qu'un chapitre spécial d'Algèbre, donnant, parmi bien d'autres conséquences, la résolution numérique des triangles. Maintenant on peut poser cette question : N'existe-t-il de fonctions que celles dont nous venons de parler et leurs combinaisons? Si la réponse était affirmative, l'Analyse laisserait apercevoir ses bornes, son champ serait fini et limité; mais il est bien loin d'en être ainsi, le Calcul différentiel et le Calcul intégral étendent indéfiniment leur domaine en fournissant l'origine et posant la base de l'étude d'un nombre infini de fonctions nouvelles. Ainsi l'on comprend que Lagrange ait donné à l'un de ses Ouvrages, qui est précisément consacré à une exposition des principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral, le titre de *Leçons sur le Calcul des fonctions.* En suivant la pensée de ce grand géomètre, nous allons présenter sur les fonctions connues par les éléments quelques considérations qui serviront d'introduction à ce Cours, et dont il sera souvent fait usage par la suite.

Les fonctions se divisent en deux catégories, suivant qu'elles sont algébriques ou transcendantes, et voici d'abord la définition des premières. Une quantité y sera dite, dans le sens le plus général, fonction algébrique de x, quand elle satisfera à une équation

$$F(x, y) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme rationnel et entier par rapport à l'inconnue y et à la variable indépendante x. Les fonctions transcendantes sont toutes celles qui ne peuvent vérifier la condition précédente, comme $\log x$, $\sin x$, $\cos x$,

et une infinité d'autres. Nous allons d'abord nous occuper des premières. Lorsque l'équation ci-dessus $F(x, y) = 0$ est du premier degré, elle donne pour y le quotient de deux polynômes : c'est le cas des *fonctions rationnelles;* ou simplement un polynôme : c'est le cas des *fonctions entières,* dont les propriétés sont le principal objet des éléments de l'Algèbre. A l'égard des fonctions rationnelles, le fait le plus important, et qui joue dans l'Analyse un grand rôle, consiste en ce qu'elles sont décomposables en une somme de termes de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$, qu'on nomme *fractions simples.* Nous allons le rappeler succinctement, pour en indiquer ensuite quelques conséquences.

Fonctions rationnelles.

I. Soient $F(x)$ et $F_1(x)$ deux polynômes entiers de degrés quelconques et sans facteurs linéaires communs. En posant

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

de sorte que les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ soient respectivement les degrés de multiplicité des facteurs $x-a$, $x-b, \ldots, x-l$, la formule de décomposition de la fonction $f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}$ consiste dans cette égalité

$$\begin{aligned} f(x) = P &+ \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^\beta} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)^\lambda}, \end{aligned}$$

où P est la partie entière du quotient de $F_1(x)$ par $F(x)$, ce qui donne une détermination immédiate et directe de ce polynôme. Pour obtenir les numérateurs des fractions simples, écrivons la fonction proposée de cette manière, savoir :

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

le terme $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ étant formé de la réunion de la partie entière P avec toutes les fractions qui ne contiennent pas $x-a$ en dé-

nominateur. Il s'ensuit que ce binôme n'entre pas en facteur dans $\varphi(x)$, de sorte qu'en posant $x = a + h$, ce qui donnera

$$f(a+h) = \frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)},$$

le terme indépendant de h dans l'expression

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h}{1}\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots$$

sera différent de zéro. En divisant $\varphi_1(a+h)$ par $\varphi(a+h)$, après avoir ordonné les deux polynômes suivant les puissances croissantes de h, le quotient obtenu d'après les règles de l'Algèbre ne contiendra donc que des puissances positives de cette quantité. Ainsi les termes

$$\frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha}$$

représenteront précisément la portion du développement de $f(a+h)$, qui contient les puissances négatives de h. . . . .

Soit, par exemple, la fonction $\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}$, dont la décomposition en fractions simples sera utilisée dans le Calcul intégral, et écrivons

$$\frac{1}{(x^2-1)^\alpha} = \frac{A}{x-1} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-1)^\alpha}$$
$$+ \frac{B}{x+1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \ldots + \frac{B_{\alpha-1}}{(x+1)^\alpha}.$$

En posant d'abord $x = 1 + h$, d'où

$$\frac{1}{(x^2-1)^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha(2+h)^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha}(2+h)^{-\alpha},$$

on voit que le développement à effectuer dépend de la formule du binôme, dans le cas de l'exposant négatif. Or nous parviendrons bientôt à cette extension si importante de la formule obtenue pour un exposant entier et positif, et qui permettra d'écrire la suite infinie

$$(2+h)^{-\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} - \frac{\alpha}{1}\frac{h}{2^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{h^2}{2^{\alpha+2}} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\frac{h^3}{2^{\alpha+3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^i\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{1.2\ldots i}\frac{h^i}{2^{\alpha+i}} + \ldots.$$

d'où

$$\frac{1}{h^\alpha}(2+h)^{-\alpha} = \frac{1}{2^\alpha h^\alpha} - \frac{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha+1}h^{\alpha-1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{1}{2^{\alpha+2}h^{\alpha-2}} - \dots$$
$$+ (-1)^{\alpha-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(2\alpha-2)}{1.2\dots(\alpha-1)}\frac{1}{2^{2\alpha-1}h} + \dots,$$

et, par conséquent, ces valeurs

$$A_{\alpha-1} = +\frac{1}{2^\alpha},$$
$$A_{\alpha-2} = -\frac{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha+1}},$$
$$A_{\alpha-3} = +\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{1}{2^{\alpha+2}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A = (-1)^{\alpha-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(2\alpha-2)}{1.2\dots(\alpha-1)}\frac{1}{2^{2\alpha-1}}.$$

Quant aux numérateurs B, $B_1, \dots$, ils se déduiront immédiatement des précédents par la relation

$$B_i = (-1)^{i+1} A_i.$$

II. Considérons encore l'expression plus générale

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}},$$

afin d'indiquer un autre procédé de décomposition où nous n'emploierons la formule du binôme que dans le cas de l'exposant entier et positif. Partant à cet effet de l'égalité

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right),$$

et changeant a en $a+h$, b en $b+k$, nous développerons les deux membres suivant les puissances de h et k, à l'aide des formules suivantes :

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \frac{h^2}{(x-a)^3} + \dots + \frac{h^\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}} + \dots,$$
$$\frac{1}{x-b-k} = \frac{1}{x-b} + \frac{k}{(x-b)^2} + \frac{k^2}{(x-b)^3} + \dots + \frac{k^\beta}{(x-b)^{\beta+1}} + \dots,$$
$$\frac{1}{(a+h)-(b+k)} = \frac{1}{a-b} + \frac{k-h}{(a-b)^2} + \frac{(k-h)^2}{(a-b)^3} + \dots.$$

On obtiendra ainsi dans le premier, pour le coefficient du terme $h^\alpha k^\beta$, la fraction proposée $\frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}$, et il est clair que le groupe des fractions simples relatives au binôme $x-a$, par exemple, sera le coefficient du même terme dans le produit des séries

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \frac{h^2}{(x-a)^3} + \ldots,$$

$$\frac{1}{(a+h)-(b+k)} = \frac{1}{a-b} + \frac{k-h}{(a-b)^2} + \frac{(k-h)^2}{(a-b)^3} + \ldots.$$

Soit donc, pour abréger,

$$(m, n) = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$$

le coefficient de $k^m h^n$ dans le développement de $(k-h)^{m+n}$, les multiplicateurs des fractions

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \ldots, \quad \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

seront évidemment

$$\frac{(\beta, \alpha)}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}, \quad \frac{(\beta, \alpha-1)}{(a-b)^{\alpha+\beta}}, \ldots, \quad \frac{(\beta, 0)}{(a-b)^{\beta+1}},$$

et l'on trouvera de même, pour les fractions

$$\frac{1}{x-b}, \quad \frac{1}{(x-b)^2}, \ldots, \quad \frac{1}{(x-b)^{\beta+1}},$$

les coefficients

$$-\frac{(\alpha, \beta)}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}, \quad -\frac{(\beta-1, \alpha)}{(a-b)^{\alpha+\beta}}, \ldots, \quad -\frac{(0, \alpha)}{(a-b)^{\alpha+1}}.$$

III. Dans l'ensemble des fractions simples, telles que $\frac{A_{m-1}}{(x-a)^m}$, on doit distinguer tout particulièrement celles où l'exposant m est égal à l'unité. Le numérateur A de ces fractions a reçu de Cauchy un nom particulier; l'illustre géomètre l'appelle le *résidu* de la fonction considérée $f(x)$, relatif à la quantité a, et de ce qui précède résulte qu'on peut le définir d'une

autre manière, comme le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $f(a+h)$ suivant les puissances ascendantes de h.

Sous ce point de vue plus général, il ne sera plus nécessaire de supposer la fonction rationnelle; en prenant, par exemple, $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, le résidu relatif à une racine quelconque $x=n\pi$ de l'équation $\sin x=0$ sera le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{1}{\sin(n\pi+h)}=\frac{(-1)^n}{\sin h}=(-1)^n\left(\frac{1}{h}+\frac{h}{6}+\ldots\right),$$

c'est-à-dire $(-1)^n$.

C'est seulement dans le Calcul intégral qu'on pourra apprécier l'importance de cette notion analytique des résidus; en ce moment, je me bornerai à indiquer l'application qu'elle reçoit dans ce théorème de Lagrange (*). Reprenant la fonction rationnelle générale $f(x)=\frac{F_1(x)}{F(x)}$, je dis que le groupe des fractions simples

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}$$

est le résidu de l'expression

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h},$$

où l'on considère comme variable la quantité h, relativement à la valeur $h=0$.

En effet, le développement de $f(a+h)$ résulte, comme on l'a vu plus haut, de l'équation

$$f(a+h)=\frac{A}{h}+\frac{A_1}{h^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha}+\frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)};$$

(*) *Actes de l'Académie de Berlin*, année 1792. Jacobi en a fait une belle et importante application dans un Mémoire intitulé : *Demonstratio nova theorematis Abeliani* (*Journal de Crelle*, t. XXIV).

on a d'ailleurs par la simple division

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha} + \ldots,$$

de sorte qu'il reste seulement à chercher le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le produit de ces deux séries ordonné suivant les puissances croissantes de cette quantité. Or on peut, dans la première, faire abstraction du terme $\frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)}$, dont le développement ne fournit que des puissances positives, et l'on trouve bien, pour le coefficient cherché, la valeur

$$\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}.$$

Ce théorème est remarquable comme donnant, pour la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples, une expression analytique qui conserve le même énoncé dans le cas des facteurs linéaires simples ou multiples du dénominateur.

IV. Comme dernière remarque sur les fonctions rationnelles, j'observerai que la décomposition en fractions simples permet de former immédiatement leurs dérivées d'ordre quelconque. La question se réduit en effet à obtenir la dérivée $n^{ième}$ de la quantité

$$y = \frac{1}{(x-a)^k},$$

qu'on trouve en l'écrivant sous cette forme

$$y = (x-a)^{-k};$$

car il vient ainsi sucessivement

$$y' = -k(x-a)^{-k-1},$$
$$y'' = +k(k+1)(x-a)^{-k-2},$$
$$y''' = -k(k+1)(k+2)(x-a)^{-k-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$y^{(n)} = (-1)^n k(k+1)\ldots(k+n-1)(x-a)^{-k-n}.$$

Prenons comme exemple

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 - a^2};$$

il suffira d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{Aa + B}{x - a} + \frac{Aa - B}{x + a}\right],$$

pour obtenir de suite

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^n}{2a}\left[\frac{Aa + B}{(x - a)^{n+1}} + \frac{Aa - B}{(x + a)^{n+1}}\right].$$

Soit en particulier $a = \sqrt{-1}$, $A = 0$, $B = 1$, on sera amené à l'expression

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{(x - \sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x + \sqrt{-1})^{n+1}}\right],$$

qui prend une forme très-simple si l'on pose $x = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Nous aurons en effet

$$\frac{1}{(x - \sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}}$$
$$= \sin^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi\right],$$

$$\frac{1}{(x + \sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}}$$
$$= \sin^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi - \sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi\right],$$

et, par conséquent,

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = (-1)^n \sin^{n+1}\varphi \sin(n+1)\varphi.$$

En remarquant que $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ est la dérivée de arc tang$x$, on voit qu'on a ainsi obtenu la dérivée d'ordre $n + 1$ de cette fonction (*).

(*) Bertrand (J.), *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 143. (Paris, Gauthier-Villars; 1864.)

Fonctions algébriques.

L'étude des fonctions algébriques non rationnelles, définies comme racines de l'équation $F(x, y) = 0$, conduit à un grand nombre de beaux résultats appartenant à la fois à l'Algèbre et au Calcul intégral, et qui mettent ainsi en évidence une étroite liaison entre ces deux parties, au premier abord, si éloignées de l'Analyse. Quelques-uns de ces résultats, dont nous aurons plus tard à faire usage, s'obtiennent très-facilement, et nous allons les donner après avoir, à cette occasion, complété en plusieurs points importants ce qu'on enseigne de la théorie des équations dans les éléments.

I. Soit

$$F(x) = 0$$

une équation de degré n, je dis qu'en désignant par $f(x)$ une fonction rationnelle quelconque, et posant

$$y = f(x),$$

cette nouvelle quantité y appartiendra encore à une équation de degré n.

Soient, en effet, $a, b, c, \ldots, l$ les diverses racines de l'équation considérée, toutes les déterminations de y seront évidemment

$$f(a),\quad f(b),\quad f(c), \ldots,\quad f(l),$$

c'est-à-dire précisément au nombre de n; ainsi l'équation transformée en y sera bien du même degré que la proposée. De cette observation si simple résulte une conséquence importante. Considérons d'abord, pour fixer les idées, l'ensemble des équations d'un degré donné dont les coefficients sont des nombres entiers. Leur nombre est infiniment grand, mais elles ne se trouvent point dans une complète indépendance les unes par rapport aux autres; ce qu'on vient d'établir conduit, en effet, à réunir dans une même classe toutes celles qui se déduisent d'une d'entre elles, $F(x) = 0$, par la substitution $y = f(x)$. Le degré sera d'abord le même, et leurs coefficients encore entiers, si les polynômes en x qui entrent au numéra-

teur et au dénominateur de $f(x)$ sont à coefficients entiers. On voit qu'ainsi la résolution de l'équation $F(x) = 0$ entraînera la résolution de toutes celles de la classe, et, sous un point de vue plus général, on pourra dire qu'on a, de la sorte, réuni les équations dont les racines sont de même nature et contiennent les mêmes irrationnalités. C'est à la théorie des nombres ou à l'Arithmétique supérieure qu'appartient le développement de cette idée, indiquée ici en quelques mots, et l'on donne plus particulièrement le nom de *théorie des formes* à l'ensemble des recherches qui se rapportent à ce beau et vaste sujet.

A l'égard des équations entre deux variables $F(x, y) = 0$, il existe une considération analogue, mais plus difficile et plus profonde; et je me bornerai à établir la notion de classe, en énonçant seulement, d'après Riemann, la condition suivante :

Deux équations $F(x, y) = 0$, $F_1(u, v) = 0$ appartiendront à la même classe lorsqu'on pourra passer de la première à la seconde en posant

$$u = f(x, y), \quad v = f_1(x, y),$$

les fonctions f et f_1 étant rationnelles en x et y, et telles, qu'inversement on puisse exprimer x et y en fonctions rationnelles de u et v (*).

II. J'établirai maintenant cette proposition importante que toute fonction rationnelle $f(x)$ d'une racine d'une équation de degré n, $F(x) = 0$, est réductible à la forme d'un polynôme de degré $n - 1$, savoir :

$$f(x) = \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \lambda.$$

Supposons d'abord que $f(x)$ soit simplement une fonction entière, de sorte qu'on ait

$$f(x) = A x^{\mu} + B x^{\mu-1} + \ldots,$$

et divisons ce polynôme par $F(x)$, de manière à obtenir l'é-

(*) Riemann, *Théorie des fonctions abéliennes*, § 12 (*Journal de Crelle*, 1857).

galité

$$f(x) = F(x)Q + R,$$

où Q désigne le quotient et R le reste. On en conclura, pour toutes les racines de l'équation proposée $F(x) = 0$,

$$f(x) = R.$$

C'est le résultat annoncé, attendu que le reste R est un polynôme en x de degré moindre que le diviseur, et au plus égal à $n-1$.

Supposons ensuite que $f(x)$ soit le quotient de deux polynômes, c'est-à-dire de la forme $f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, et, pour plus de simplicité, admettons que l'équation soit seulement du troisième degré. Si l'on désigne par a, b, c ses racines, il s'agit alors de prouver qu'on peut déterminer les trois coefficients α, β, γ de manière que l'égalité suivante

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

soit satisfaite, en supposant successivement $x = a$, $x = b$, $x = c$. Or les équations

$$f(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma,$$
$$f(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma,$$
$$f(c) = \alpha c^2 + \beta c + \gamma$$

ne présenteront jamais ni impossibilité ni indétermination; car le dénominateur commun des valeurs des inconnues est le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, au signe près, le produit $(a-b)(a-c)(b-c)$, et ne s'évanouira que dans le cas de deux racines égales. Excluant ce cas, nous observerons que le système des trois équations ne change point, de quelque manière qu'on permute a, b, c; par conséquent, les coefficients α, β, γ sont des fonctions symétriques des racines, et s'exprimeront rationnellement au moyen des coefficients de l'équation proposée.

Le même raisonnement subsistant quel que soit le degré de cette équation, la proposition est complétement démontrée.

III. Il ne sera pas inutile de donner, avant d'aller plus loin, quelques applications simples des considérations précédentes. Soit donc l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0,$$

et posons

$$y = x^2 - 4x + 4;$$

la transformée en y, que nous savons *à priori* devoir être du troisième degré, s'obtiendra en effet comme il suit.

Déduisons ces deux relations de la proposée, en multipliant les deux membres successivement par x et x^2, savoir :

$$xy = x^3 - 4x^2 + 4x,$$
$$x^2y = x^4 - 4x^3 + 4x^2;$$

puis, en employant la proposition du paragraphe précédent, ramenons les seconds membres à des binômes du second degré, qui seront les restes obtenus en les divisant par $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$. On parviendra ainsi aux trois relations

$$y = x^2 - 4x + 4,$$
$$xy = x^2 - 2x + 1,$$
$$x^2y = 3x^2 - 5x + 1;$$

et en les écrivant de cette manière

$$x^2 - 4x + 4 - y = 0,$$
$$x^2 - x(2 + y) + 1 = 0,$$
$$x^2(3 - y) - 5x + 1 = 0,$$

on voit que l'équation cherchée s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 - y \\ 1 & 2 + y & 1 \\ 3 - y & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Or on reproduit ainsi l'équation proposée, savoir :

$$y^3 - 5y^2 + 6y - 1 = 0,$$

d'où résulte que, si a désigne une de ses racines, la quantité a^2-4a+4 sera pareillement une racine, mais non la même, car l'égalité $a^2-4a+4=a$ donnerait les valeurs inadmissibles l'une et l'autre $a=1$, $a=4$. Maintenant on obtient, par la formule connue,

$$3a=5+\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{-3}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\frac{21}{2}\sqrt{-3}},$$

et l'on en déduit

$$9(a^2-4a+4)=15-2\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{-3}}-2\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\frac{21}{2}\sqrt{-3}}$$
$$+\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{-3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}-\frac{21}{2}\sqrt{-3}\right)^2},$$

ce qui doit se ramener à $9b$, en désignant par b une des deux autres racines, savoir :

$$9b=15+3\varepsilon\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{-3}}+3\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\frac{21}{2}\sqrt{-3}},$$

ε étant l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité. C'est là un exemple de transformation, où un système de quatre radicaux cubiques se réduit à deux seulement, qui échappe tout à fait aux règles du calcul élémentaire.

IV. La proposition démontrée au § II fait voir que toute fonction rationnelle $f(x,y)$ de la variable indépendante et d'une racine de l'équation de degré n, $F(x,y)=0$, est toujours réductible à la forme

$$f(x,y)=\alpha y^{n-1}+\beta y^{n-2}+\ldots,$$

dont les coefficients sont rationnels en x. Mais c'est encore une autre forme, conséquence immédiate de la précédente, que l'on emploie dans une théorie importante du Calcul intégral. Multiplions et divisons $f(x,y)$ par la dérivée, prise par rapport à y, du premier membre de l'équation proposée, il viendra

$$f(x,y)=\frac{(\alpha y^{n-1}+\beta y^{n-2}+\ldots)F'_y(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Or, en effectuant au numérateur la multiplication indiquée, on trouvera un polynôme entier en y, qui se ramènera, comme on l'a déjà vu, au degré $n-1$. Par suite, il viendra

$$f(x,y)=\frac{Gy^{n-1}+Hy^{n-2}+\ldots}{F'_y(x,y)},$$

G, H,... étant rationnels en x; c'est la forme employée pour la première fois par Abel, et qui figure dans les travaux de Riemann, de MM. Clebsh et Gordan sur les intégrales de différentielles algébriques. En l'appliquant au cas simple de l'équation

$$y^2=X,$$

nous en déduirons l'expression suivante

$$f(x,y)=\frac{G\sqrt{X}+H}{\sqrt{X}}=G+\frac{H}{\sqrt{X}},$$

et nous observerons que la fonction rationnelle H étant décomposable en une partie entière, c'est-à-dire en termes tels que ax^k, et en fractions simples $\frac{A}{(x-a)^n}$, il s'ensuit que la partie irrationnelle de la fonction $f(x,y)$ se trouve pareillement décomposée en éléments qui sont de ces deux espèces, savoir :

$$\frac{ax^k}{\sqrt{X}},\quad \frac{A}{(x-a)^n\sqrt{X}}.$$

Ce résultat nous sera utile par la suite.

V. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que la forme extérieure en quelque sorte des fonctions algébriques irrationnelles, nous allons maintenant faire un pas de plus, en nous limitant d'ailleurs à cette même expression

$$f(x,\sqrt{X}),$$

où je supposerai X un polynôme entier de degré pair $2m$.

Soit alors en décomposant en facteurs linéaires

$$X=A(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

nous tirerons de cette transformation bien simple, savoir :

$$X = A(x-a)^{2m}\left(\frac{x-b}{x-a}\right)\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\cdots\left(\frac{x-l}{x-a}\right),$$

une conséquence importante.

Posons, en effet, en introduisant une nouvelle variable,

$$\frac{x-b}{x-a} = t,$$

ce qui donne

$$x = \frac{b-at}{1-t},$$

nous en conclurons aisément

$$\sqrt{X} = \frac{b-a}{(1-t)^m}\sqrt{At[b-c-(a-c)t]\ldots[b-l-(a-l)t]},$$

et l'on voit que le nouveau radical carré fonction de t ne renferme plus cette variable qu'au degré $2m-1$. Posons donc pour un instant

$$T = At[b-c-(a-c)t]\ldots[b-l-(a-l)t];$$

l'expression $f(x, \sqrt{X})$, se transformant en celle-ci

$$f\left(\frac{b-at}{1-t}, \ \frac{b-a}{(1-t)^m}\sqrt{T}\right),$$

pourra se représenter simplement par

$$\varphi(t, \sqrt{T}),$$

φ désignant encore une fonction rationnelle de la nouvelle variable et du radical $\sqrt{T}$. La substitution que nous venons d'employer a ainsi pour conséquence de ramener une catégorie d'irrationnelles algébriques à une autre de même espèce, mais plus simple. Soit, par exemple,

$$m = 1 \quad \text{et} \quad X = A(x-a)(x-b);$$

alors T se réduira à At, et l'on voit de suite qu'il suffira de poser $t = \theta^2$ pour faire disparaître le radical et obtenir une fonction rationnelle par rapport à θ. D'où ce résultat important, que les irrationnelles dépendant de la racine carrée d'un

trinôme du second degré deviennent de simples fonctions rationnelles par la substitution

$$x = \frac{b - a\theta^2}{1 - \theta^2}.$$

VI. Ce qui précède donne le premier exemple du procédé analytique le plus fécond pour l'étude des fonctions, et qui consiste dans la substitution d'une variable à une autre. Ce procédé ouvre en quelque sorte immédiatement un vaste champ de recherches intéressantes, car on se demandera si la substitution employée tout à l'heure est seule propre à ramener l'expression considérée aux fonctions rationnelles, s'il n'existe pas de substitutions donnant le même résultat pour la racine carrée de polynômes de degré supérieur, ou permettant de ramener l'une à l'autre les racines carrées de polynômes de degrés différents. J'indique d'autant plus volontiers ces questions qu'elles peuvent servir à donner de l'étude des fonctions algébriques une idée plus précise et plus complète, et la première offrant l'occasion de montrer, jusqu'à un certain point, comment ce sujet est lié à un autre plus élevé, à la théorie des fonctions circulaires, je vais y répondre succinctement. A cet effet, j'envisage le radical $\sqrt{x^2+1}$ qui exigerait, pour être rendu rationnel, la substitution imaginaire

$$x = \sqrt{-1}\,\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}.$$

Posons

$$\theta = \operatorname{tang}\varphi \quad \text{et} \quad x = \operatorname{tang} n\varphi;$$

on sait par la Trigonométrie que x sera exprimable rationnellement en θ si n est un nombre entier; j'ajoute que, si ce nombre est pair, le radical $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos n\varphi}$ sera également rationnel par rapport à θ. Dans ce cas, en effet, $\cos n\varphi$ qui est un polynôme entier en $\cos\varphi$, ne renferme que des puissances paires de cette quantité; or $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\theta^2}$, de sorte que $\cos n\varphi$ est bien alors rationnel en θ. Soit, pour fixer les

dées, $n = 2$, on aura

$$x = \frac{2\theta}{1-\theta^2} \quad \text{et} \quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2},$$

d'où

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2};$$

pour $n = 4$, la relation

$$x = \frac{4\theta - 4\theta^3}{1 - 6\theta^2 + \theta^4}$$

donnerait

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{(1+\theta^2)^2}{1 - 6\theta^2 + \theta^4}.$$

De cette manière, on est donc parvenu à des substitutions débarrassées d'imaginaires, et en nombre infini.

VII. Mais complétons ce qui précède, en voyant ce que donnerait l'hypothèse de n impair dans la substitution

$$x = \operatorname{tang}(n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \theta).$$

Alors on sait que $\cos n\varphi$ ne contiendra que des puissances impaires de $\cos\varphi$ (*), de sorte que l'on peut écrire, en désignant par F un polynôme entier,

$$\cos n\varphi = \cos\varphi \, F(\cos^2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} F\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right).$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\cos n\varphi} = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\theta^2} f(\theta),$$

$f(\theta)$ étant une fonction rationnelle; de sorte que la substitution employée reproduit en θ précisément la même irrationnelle algébrique que l'on avait en x. Soit, par exemple, $n = 3$, alors

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\left(\frac{4}{1+\theta^2} - 3\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\left(\frac{1-3\theta^2}{1+\theta^2}\right),$$

(*) On a en général (LAGRANGE, *Leçons sur le Calcul des fonctions*, p. 119):

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - \frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^i \frac{n(n-i-1)(n-i-2)\ldots(n-2i+1)}{1\cdot 2\ldots i}(2\cos\varphi)^{n-2i} + \ldots$$

et la formule de substitution étant

$$x = \operatorname{tang}(3 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \theta) = \frac{3\theta - \theta^3}{1 - 3\theta^2},$$

on aura

$$\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos 3\varphi} = \sqrt{1 + \theta^2}\,\frac{1 + \theta^2}{1 - 3\theta^2}.$$

Ce résultat met en évidence un caractère algébrique remarquable des formules relatives à la multiplication des arcs dans la théorie des fonctions circulaires. En voici un autre de même nature : posons $\theta = \sin\varphi$ et $x = \sin n\varphi$; on sait que, n étant encore un nombre entier impair, x sera un polynôme entier en θ du degré n (*). Or l'égalité employée tout à l'heure, savoir :

$$\cos n\varphi = \cos\varphi\, F(\cos^2\varphi),$$

conduit à cette conséquence

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \theta^2}\, F(1 - \theta^2).$$

Pour $n = 3$, par exemple, la relation entre x et θ, savoir :

$$x = 3\theta - 4\theta^3,$$

donnera

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \theta^2}\,(1 - 4\theta^2).$$

La question suivante, qu'on est maintenant conduit à se poser, fera pleinement ressortir les rapports des questions algébriques concernant l'étude des radicaux carrés, avec la théorie des transcendantes.

VIII. Soit proposé d'exprimer x par un polynôme en θ, de manière à avoir

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \theta^2}\, T,$$

T étant de même rationnel et entier en θ.

Je dis, en premier lieu, que les polynômes x et T sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas s'annuler à la fois pour une même valeur de θ. En effet, l'équation pro-

(*) Ce polynôme s'obtient en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, dans la formule de la note précédente.

posée montre que, pour $T = 0$, on a

$$x^2 = 1.$$

Désignons, en second lieu, les degrés de x et T par n et m, de sorte qu'en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de θ on ait

$$x = A\theta^n + \ldots, \quad T = B\theta^m + \ldots;$$

on trouvera, en substituant dans l'équation proposée, élevant au carré et égalant dans les deux membres les termes du degré le plus élevé,

$$A^2\theta^{2n} = B^2\theta^{2m+2},$$

et l'on en conclut

$$m = n - 1,$$
$$B = \pm A.$$

Cela posé, prenons, par rapport à θ, les dérivées des deux membres de notre équation

$$1 - x^2 = (1 - \theta^2)T^2;$$

il viendra, en supprimant le facteur 2,

$$-xx'_\theta = (1 - \theta^2)TT' - \theta T^2 = T[(1 - \theta^2)T' - \theta T],$$

d'où l'on voit que le polynôme T divise le produit xx'_θ. Mais on a établi qu'il est premier avec x, donc il divise l'autre facteur x'_θ. On a aussi établi qu'il est du même degré que x'_θ, par conséquent le quotient est une constante k, et si l'on égale dans la relation

$$x'_\theta = kT$$

les termes du degré le plus élevé en θ, on trouvera

$$nA\theta^{n-1} = \pm kA\theta^{n-1};$$

donc $k = \pm n$, et la relation proposée devient en conséquence celle-ci :

$$\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - \theta^2}\,\frac{x'_\theta}{n}.$$

Il n'y figure plus, comme on voit, que le seul polynôme x, avec sa dérivée par rapport à θ, et alors en l'écrivant sous cette

forme

$$\frac{x'_0}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pm n}{\sqrt{1-\theta^2}},$$

on reconnaîtra dans chaque membre les dérivées de deux fonctions connues de θ. Si l'on choisit d'abord le signe + dans le second membre, il viendra en remontant aux fonctions primitives

$$\text{arc}\sin x = n\,\text{arc}\sin\theta + \text{C},$$

si l'on prend le signe —, on aura

$$\text{arc}\sin x = n\,\text{arc}\cos\theta + \text{C},$$

C étant une constante; de sorte que tous les polynômes entiers en θ satisfaisant à la question sont compris dans l'une ou dans l'autre de ces formes :

$$x = \sin(n\,\text{arc}\sin\theta + \text{C}),$$
$$x = \sin(n\,\text{arc}\cos\theta + \text{C}),$$

et une discussion facile montre que toutes les expressions entières qu'on peut obtenir sont renfermées dans celle-ci :

$$\cos(n\,\text{arc}\cos\theta),$$

n étant un entier quelconque (*).

Cette expression, suivant que n est pair ou impair, conduit aux deux suivantes : $\cos(n\,\text{arc}\sin\theta)$ et $\sin(n\,\text{arc}\sin\theta)$; d'où l'on voit que les polynômes auxquels nous conduit la solution de la question algébrique, en y posant $\theta = \frac{x}{n}$, donnent pour n infini les fonctions de la Trigonométrie élémentaire, $\cos x$ et $\sin x$; car on sait que $\lim\left(n\,\text{arc}\sin\frac{x}{n}\right) = x$, pour $n = \infty$.

(*) Ces polynômes en θ que l'on a rencontrés en Trigonométrie s'offrent dans un grand nombre de questions d'Analyse, et possèdent beaucoup de propriétés très-remarquables : l'une de ces propriétés les plus singulières, et que je puis indiquer ici à cause de son caractère élémentaire, consiste en ce que $\cos(n\,\text{arc}\cos\theta)$ représente, parmi tous les polynômes en θ de degré n, celui qui est le plus voisin possible de zéro, entre les limites -1 et $+1$ de la variable θ. (Bertrand, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 516.)

IX. Je terminerai ce que je me suis proposé de dire sur la nature et le but des études relatives aux fonctions algébriques, en ajoutant encore quelques mots sur les racines carrées des polynômes du quatrième degré. Il n'existe plus alors de substitutions qui puissent, comme précédemment, les ramener aux simples fonctions rationnelles; et le point de départ des recherches si importantes auxquelles donnent lieu ces expressions consiste dans l'étude des substitutions rationnelles de la forme

$$x = \frac{U}{V},$$

où U et V sont deux polynômes en θ, qu'on peut supposer sans facteurs communs, savoir :

$$U = \alpha + \alpha'\theta + \alpha''\theta^2 + \ldots + \alpha^{(p)}\theta^p,$$
$$V = \beta + \beta'\theta + \beta''\theta^2 + \ldots + \beta^{(p)}\theta^p,$$

et tels que $\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$ reproduit un radical semblable $\sqrt{a\theta^4 + b\theta^3 + c\theta^2 + d\theta + e}$ multiplié par une fonction rationnelle de θ. Cette condition exige que l'on ait

$$AU^4 + BU^3V + CU^2V^2 + DUV^3 + EV^4 = (a\theta^4 + b\theta^3 + c\theta^2 + d\theta + e)T^2,$$

T désignant un polynôme entier; or on va voir que de là résulte la relation suivante, où k est une constante, savoir :

$$UV' - VU' = kT.$$

Observons d'abord que T est le produit de tous les facteurs en θ qui sont élevés au carré dans le premier membre de l'équation précédente. J'ajoute qu'en faisant pour un instant

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

d'où

$$AU^4 + BU^3V + CU^2V^2 + DUV^3 + EV^4$$
$$= A(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V),$$

tous les facteurs doubles des divers polynômes $U - \alpha V$, $U - \beta V, \ldots$ appartiennent à l'expression $UV' - VU'$; car on a identiquement, par exemple,

$$(U - \alpha V)V' - (U - \alpha V')V = UV' - VU',$$

et comme un facteur élevé au carré dans $U - \alpha V$ divise ce polynôme et sa dérivée $(U - \alpha V)'$, il divise bien en effet $UV' - VU'$. Or T est précisément formé du produit de ces facteurs doubles, son degré en θ est $2p - 2$, et le degré de $UV' - VU'$ ne peut surpasser cette limite, de sorte que le quotient $\frac{U'V - UV'}{T}$, qui est entier, est nécessairement une constante k. Ayant ainsi

$$\frac{U'V - UV'}{T} = k,$$

on en conclura

$$\frac{T}{V^2} = \frac{1}{k}\,\frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{1}{k}\,x'_\theta;$$

et par conséquent

$$\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E} = \sqrt{a\theta^4 + b\theta^3 + c\theta^2 + d\theta + e}\,\frac{x'_\theta}{k},$$

ou bien encore

$$\frac{x'}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}} = \frac{k}{\sqrt{a\theta^4 + b\theta^3 + c\theta^2 + d\theta + e}},$$

forme analytique semblable à celle qui a été obtenue précédemment, et qui lie le problème algébrique aux propriétés d'une fonction transcendante analogue aux lignes trigonométriques, mais d'un ordre plus élevé. La proposition sur les racines carrées des polynômes du 4ᵉ degré, que je viens d'établir succinctement d'après Jacobi, a été en effet le point de départ des découvertes relatives à la théorie des fonctions elliptiques qui ont à jamais illustré le nom de ce grand géomètre (*).

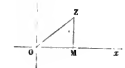
Des variables imaginaires dans l'étude des fonctions.

Je ne rappellerai point l'origine des expressions de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, ni les conventions qui ont été faites pour les soumettre aux diverses opérations du calcul élémentaire. On sait les propositions auxquelles elles donnent lieu dans la

(*) *Voyez* l'Ouvrage intitulé : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum.*

théorie des équations algébriques et en Trigonométrie, où elles figurent comme l'élément même de la formule de Moivre. Mais il est indispensable de faire connaître comment on les introduit dans l'analyse générale, où leur rôle a encore plus d'importance et d'étendue. Nous commencerons à cet égard par la considération géométrique suivante.

I. Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 1), on fait correspondre à toute expression imaginaire



$$z = x + y\sqrt{-1}$$

un point Z dont l'abscisse est la partie réelle x et l'ordonnée le coefficient y de $\sqrt{-1}$. De là résulte que toute loi de succession de quantités de cette nature sera donnée par une suite de points, et, par conséquent, par un lieu géométrique si les quantités x et y varient d'une manière continue.

Cela posé, soit u une fonction de la variable z, un polynôme entier par exemple, qu'on pourra, pour toute valeur de z, mettre sous la forme

$$u = X + Y\sqrt{-1}.$$

Nous appliquerons le même mode de représentation à u et à la variable indépendante, de sorte qu'à un lieu, à une ligne quelconque, déterminant la loi des valeurs z, répondra une autre ligne donnant la loi de succession des valeurs de la fonction. Nous pourrons aussi employer, au lieu des coordonnées rectangulaires, les coordonnées polaires ρ et ω, en faisant

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

ρ étant la distance OZ toujours prise positivement, et ω l'angle ZOx. Alors on nomme ρ le module, l'angle ω l'argument de z, et à l'égard de u, nous poserons semblablement

$$X = R\cos\varphi, \quad Y = R\sin\varphi.$$

Ces principes établis, notre but est maintenant de montrer comment la dépendance de ces éléments analytiques, ou celle

des deux figures construites avec les quantités z et u, manifeste les propriétés caractéristiques les plus importantes de la fonction.

II. Je chercherai, en premier lieu, comment l'argument du binôme $z - a$ varie avec l'argument de z, la constante a étant de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Ayant donc fait d'une part

$$z = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

et de l'autre

$$z - a = R(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

nous aurons

$$\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) - \alpha - \beta\sqrt{-1} = R(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

d'où ces équations

$$\rho\cos\omega - \alpha = R\cos\varphi,$$
$$\rho\sin\omega - \beta = R\sin\varphi,$$

qui déterminent, avec la condition de R positif, un seul angle φ compris entre zéro et 2π. C'est cet angle que je vais considérer, en supposant ρ constant, comme fonction de la variable ω. Partant à cet effet de la valeur

$$\tang\varphi = \frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha},$$

et prenant la dérivée de l'expression

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha},$$

savoir

$$\varphi' = \rho\,\frac{\rho - \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega}{(\rho\cos\omega - \alpha)^2 + (\rho\sin\omega - \beta)^2},$$

j'observe que le numérateur, en introduisant un angle auxiliaire ω_0, peut s'écrire ainsi

$$\rho - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos(\omega - \omega_0).$$

Or de là résultent deux modes d'existence bien distincts pour la fonction φ, suivant qu'on aura $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \rho$ ou $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \rho$. Dans le premier cas, la dérivée étant toujours positive, φ croît indéfiniment avec ω. Dans le second, cette dérivée s'annule

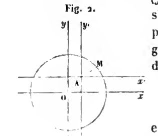
en posant

$$\frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos(\omega - \omega_0);$$

elle offre, comme on le reconnaît aisément, une série périodique de valeurs alternativement positives et négatives, et l'angle φ reste compris entre un maximum et un minimum. Ce résultat important peut s'obtenir, par la Géométrie, d'une manière très-facile.

Remarquant que la variable z est représentée par un point M (*fig.* 2) du cercle $x^2+y^2=\rho^2$, je considère deux nouveaux axes coordonnés parallèles aux premiers, et dont l'origine, ayant α et β pour abscisse et ordonnée, représenterait la constante

Fig. 2.



$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Cela posé, entre les coordonnées x' et y' du point M et les anciennes, on aura les relations

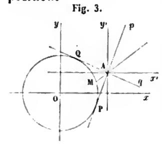
$$x' = x - \alpha, \quad y' = y - \beta,$$

d'où

$$x' + y'\sqrt{-1} = z - a.$$

Le module et l'argument de $z - a$ sont donc la longueur AM et l'angle M$\text{A}x'$. Or la condition $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} < \rho$ revient à supposer le point A dans l'intérieur du cercle de rayon ρ, et alors, en effet, lorsque le point M décrit la circonférence, cet angle va toujours en croissant et a repris sa valeur initiale augmentée de 2π, quand le rayon AM est revenu à sa première position.

Fig. 3.



Mais qu'on place en second lieu (*fig.* 3) le point A en dehors du cercle, et l'on voit que la direction MA oscille entre les limites PAp, QAq, déterminées par les tangentes AP et AQ, de sorte que le point M, revenant à sa position initiale après avoir décrit la cir-

conférence entière, l'angle φ, après avoir été tour à tour en décroissant et en augmentant, finit par reprendre sa valeur primitive.

III. La construction géométrique qu'on vient d'employer conduit facilement à reconnaître qu'on peut substituer au cercle une courbe fermée quelconque, contenant à son intérieur l'origine des coordonnées, et parvenir à la même conclusion; car on n'a eu recours à aucune propriété caractéristique de la circonférence, si ce n'est d'être une courbe fermée (*). Considérons maintenant, en nous plaçant à ce point de vue plus général, le module et l'argument du produit d'un nombre quelconque de facteurs binômes

$$u = (z - a)(z - b)\ldots(z - l),$$

et supposons que la variable imaginaire

$$z = \rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right)$$

décrive un contour fermé quelconque S. Si l'on fait

$$z - a = \mathrm{R}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$
$$z - b = \mathrm{R}_1\left(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z - l = \mathrm{R}_n\left(\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n\right),$$

et

$$u = \mathfrak{R}\left(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi\right),$$

l'équation

$$\mathfrak{R}\left(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi\right)$$
$$= \mathrm{R}\mathrm{R}_1\ldots\mathrm{R}_n(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1)\ldots(\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n)$$

(*) En supposant ρ fonction de ω dans l'expression

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha},$$

on trouverait, pour la dérivée de φ,

$$\varphi' = \frac{\rho^2 - \rho(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega) - \rho'(\alpha\sin\omega - \beta\cos\omega)}{(\rho\sin\omega - \beta)^2 + (\rho\cos\omega - \alpha)^2};$$

d'où résulte que la fonction de ω placée au numérateur ne pourra s'évanouir et changer de signe qu'autant que le point (α, β) sera extérieur à la courbe déterminée par l'équation entre ρ et ω.

donnera

$$\mathcal{R} = RR_1 \ldots R_n,$$

et

$$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n + 2k\pi.$$

Cela posé, lorsque la variable z partira d'un point du contour pour y revenir après l'avoir décrit entièrement et une seule fois, l'angle ω croîtra d'une valeur déterminée ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$ et des divers arguments φ, fonctions continues de ω, ceux qui correspondent à des constantes $a, b, \ldots, l$, renfermées à l'intérieur de S, augmenteront aussi de 2π, et ceux qui correspondent à des constantes placées à l'extérieur reprendront, au contraire, la même valeur. On a donc le théorème suivant :

Lorsque la variable z décrit un contour fermé, l'argument du polynôme entier

$$u = (z-a)(z-b)\ldots(z-l)$$

varie d'un multiple entier $2\mu\pi$ de la circonférence, égal au nombre μ des racines de l'équation $u = 0$, qui sont contenues dans l'intérieur de ce contour.

Remarquons qu'en faisant

$$u = X + Y\sqrt{-1},$$

on a

$$X = \mathcal{R}\cos\Phi, \quad Y = \mathcal{R}\sin\Phi,$$

d'où

$$\frac{X}{Y} = \operatorname{cotang}\Phi.$$

Cela étant, il suffit d'établir cette proposition facile que la variable z décrivant une fois le contour fermé, le rapport $\frac{X}{Y}$ s'évanouit pour différents points de ce contour, en passant du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif, pour avoir ainsi la démonstration donnée par Sturm, du théorème célèbre de Cauchy, sur les racines imaginaires des équations algébriques (*).

(*) *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. I, p. 290.

III. Les considérations précédentes montrent déjà l'importance de l'emploi des variables imaginaires dans l'étude des fonctions entières, en conduisant presque sans calcul au principe même du théorème mémorable donné par Cauchy, pour déterminer le nombre des racines de toute équation algébrique qui sont renfermées dans un contour donné. A la vérité, nous ne donnons point encore complétement cette belle découverte du grand géomètre, qui sera exposée dans le Calcul intégral, et sans en rien omettre, en suivant la voie même de l'inventeur; mais il suffit d'en avoir obtenu le point essentiel, dont nous allons dans un instant trouver une application importante.

Considérons, après les fonctions entières, les fonctions algébriques définies comme racines de l'équation

$$F(z, u) = 0,$$

et suivons les conséquences de la représentation géométrique simultanée de la variable indépendante z et de u. A un lieu déterminé, figurant la loi des valeurs imaginaires de z, correspondra un autre lieu, représentant de même, et pour les diverses racines de l'équation proposée, la loi de succession de leurs valeurs. Cela posé, et en désignant son degré par n, il est naturel de penser que le système de ces racines sera représenté par n courbes distinctes, ce qui reviendrait à envisager chaque racine comme une fonction bien déterminée de z. Par exemple, l'équation

$$u^2 = F(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-l),$$

donnerait ces deux expressions,

$$u = +\sqrt{F(z)} \quad \text{et} \quad u = -\sqrt{F(z)}.$$

Mais ici vient s'offrir, à l'égard des irrationnelles algébriques, quelque chose de remarquable et d'entièrement caractéristique, que l'étude de cette équation va mettre en pleine lumière.

IV. Soit, comme plus haut,

$$z = x + y\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

ρ étant déterminé en fonction de ω, de manière à donner une courbe fermée S, décrite en entier et une seule fois, en faisant croître ω de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$. Si l'on pose

$$F(z) = \mathcal{R}(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi),$$

l'une des racines, $u = +\sqrt{F(z)}$, s'obtiendra immédiatement sous la forme

$$X + Y\sqrt{-1} = \sqrt{\mathcal{R}}(\cos\tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{2}\Phi),$$

et les équations

$$X = \sqrt{\mathcal{R}}\cos\tfrac{1}{2}\Phi, \quad Y = \sqrt{\mathcal{R}}\sin\tfrac{1}{2}\Phi,$$

nous permettront de construire la courbe qui correspond à S.

Je suppose donc qu'on ait $\Phi = \Phi_0$ pour $\omega = \omega_0$; tous les points de cette courbe s'obtiendront en faisant croître ω jusqu'à la valeur $\omega_0 + 2\pi$, et l'argument Φ parviendra ainsi, comme nous l'avons vu, en variant d'une manière continue, à la valeur $\Phi_0 + 2\mu\pi$. Or les relations

$$\cos\tfrac{1}{2}(\Phi_0 + 2\mu\pi) = (-1)^\mu \cos\tfrac{1}{2}\Phi_0,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\Phi_0 + 2\mu\pi) = (-1)^\mu \sin\tfrac{1}{2}\Phi_0$$

montrent que, μ étant un nombre impair, les coordonnées X et Y ne reprennent point leurs valeurs initiales, de sorte que le lieu géométrique relatif à u n'est point une courbe fermée, et qu'il l'est au contraire si μ est supposé un nombre pair, attendu que le module $\mathcal{R}$, fonction entière de $\sin\omega$ et $\cos\omega$, conserve toujours la même valeur pour $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + 2\pi$.

Ce que l'on vient d'établir à l'égard de la racine $u = +\sqrt{F(z)}$ a lieu également pour la seconde racine $u = -\sqrt{F(z)}$, et si l'on construit en même temps les deux courbes figurant la loi de succession de ces quantités, on conclut que, dans le premier cas, le point de départ de l'une d'elles coïncidant avec le point d'arrivée de l'autre, on obtient, en construisant le double système de points, non pas deux courbes qui, l'une et l'autre, soient interrompues et s'arrêtent brusquement, mais une courbe fermée unique. Dans le second cas, au con-

traire, chacune des racines reprenant sa valeur initiale, la construction effectuée donne pour résultat deux courbes fermées et distinctes. La signification du nombre μ conduit donc à ce théorème :

La variable indépendante décrivant un contour fermé, le système des racines de l'équation

$$u^2 = F(z)$$

est figuré par une seule courbe, ou par deux courbes fermées distinctes, suivant qu'il y a un nombre impair ou un nombre pair de racines de l'équation $F(z) = 0$, *renfermées dans l'intérieur de ce contour.*

La dénomination de *non uniformes* sera employée désormais à l'égard des fonctions de z, qui diffèrent ainsi des fonctions rationnelles par cette circonstance si frappante de donner lieu tantôt à des courbes fermées, tantôt à des courbes interrompues, suivant le chemin décrit à partir d'un point donné par la variable indépendante pour revenir à ce même point. On nomme, au contraire, *uniformes* les fonctions qui sont toujours représentées par des courbes fermées, quel que soit le contour fermé décrit par la variable. Tels sont les polynômes entiers, les séries infinies convergentes, comme e^z, pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable, ou encore les quotients de pareilles séries. Parmi les fonctions non uniformes de nature si diverse dont l'Analyse donne l'origine et la définition, les fonctions algébriques ont une importance particulière; mais, à leur égard, je dois me borner aux indications suivantes.

Considérant en général l'équation $F(z, u) = 0$, les valeurs de la variable qui lui feront acquérir deux ou plusieurs racines égales joueront le même rôle que les quantités $a, b, \ldots, l$ dans la question précédente. Ainsi, en faisant décrire à z un contour fermé ne renfermant aucun point qui corresponde à ces quantités, le système des valeurs de n racines u est figuré par n chemins fermés, comme si ces racines étaient chacune des fonctions uniformes. Mais quand le contour relatif à la va-

riable indépendante comprend un ou plusieurs de ces points, les racines qui, le long de ce contour, sont fonctions continues de z (*) n'ont plus les mêmes valeurs au point de départ et au point d'arrivée. Elles s'échangent alors entre elles d'une certaine manière que M. Puiseux a donné le moyen de déterminer, en se fondant sur la règle célèbre du parallélogramme analytique de Newton (**), dans son beau et important travail intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques* (***). Il en résulte, pour le système des quantités u, un nombre moindre de courbes fermées, et souvent même une seule. Ajoutons que ces modes de permutation des racines suivant les divers chemins suivis par la variable z pour revenir à sa valeur initiale tiennent à leurs propriétés les plus importantes, et permettent de reconnaître dans des cas très-étendus, par exemple quand le degré de l'équation $F(z, u) = 0$ est un nombre premier, si elle est résoluble par radicaux. Les points figurant ces valeurs de z, pour lesquelles deux ou plusieurs racines de la proposée deviennent égales, ont reçu, en raison même de cette circonstance, la dénomination de *points d'embranchement, de ramification*, ou encore de *points critiques.* Ils constituent, pour les fonctions algébriques irrationnelles, un genre de discontinuité spécial, d'une autre nature que le passage par l'infini, pour une valeur particulière de la variable. Quant aux points répondant à ces valeurs qui rendent ainsi une fonction infinie, ils ont reçu la dénomination de *pôles*, sous la double condition que l'inverse de la fonction s'annule pour la même valeur, et qu'elle ne puisse acquérir plusieurs déterminations par suite d'une révolution de la variable autour de ce point. Par exemple, la fonction $\frac{1}{z-a}$ a un pôle $z = a$,

(*) Théorème de M. Cauchy, *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 109.

(**) L'objet de cette règle donnée par Newton sous forme géométrique, dans le court Traité intitulé : *Artis analyticæ specimina vel geometria analytica*, et réduite à un calcul arithmétique simple par Lagrange, est d'obtenir l'exposant du premier terme de chacune des racines de l'équation $F(z, u) = 0$ développée suivant les puissances ascendantes de z.

(***) *Journal de M. Liouville*, t. XV, 1850.

celle-ci $\frac{1}{z-a}\sqrt{z-b}$ a un pôle $z=a$ et un point d'embranchement $z=b$. La fonction $e^{\frac{1}{z-a}}$, qui devient encore infinie pour $z=a$, présente une discontinuité d'une nature entièrement différente, attendu que son inverse, à savoir : $e^{-\frac{1}{z-a}}$, est également infinie pour $z=a$. Ce point $z=a$ ne sera donc point un pôle à l'égard de cette fonction. Enfin, en un point d'embranchement, une fonction peut devenir infiniment grande, sans que ce point soit pour cela un pôle, le caractère essentiel d'un pôle étant, comme nous l'avons dit, que la fonction soit uniforme dans son voisinage (*).

De l'exponentielle et des fonctions circulaires.

I. C'est à l'introduction des exposants fractionnaires, imaginés par Descartes, qu'est due la notion de la fonction exponentielle limitée ainsi au cas où la variable est réelle. Pour l'étendre à des valeurs imaginaires, il a fallu tirer de cette première notion un développement en série suivant les puissances ascendantes de la variable, ou encore cette expression remarquable de e^x comme limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ pour m infini, et voici comment on a procédé.

En partant du développement démontré seulement pour des valeurs réelles

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}+\ldots,$$

nous ferons cette remarque, que la série du second membre conduit à un résultat fini et déterminé lorsqu'on y remplace x par $a+b\sqrt{-1}$. Soit pour cela

$$a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\sin\varphi,$$

il est facile alors, au moyen de la formule de Moivre

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

(*) C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abel'schen Integrale.*

d'obtenir sous la forme $A + B\sqrt{-1}$ le résultat de la substitution

$$x = a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

et l'on trouve, en effet,

$$A = 1 + \frac{\rho}{1}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\cos 2\varphi + \ldots + \frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\cos m\varphi + \ldots,$$

$$B = \frac{\rho}{1}\sin\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\sin 2\varphi + \ldots + \frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\sin m\varphi + \ldots.$$

Or, on voit que ces développements ordonnés par rapport aux puissances de ρ sont toujours convergents, et l'on en conclut que la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

définit bien une fonction dans toute l'étendue des valeurs réelles et imaginaires de la variable.

Un second point à établir, c'est que la fonction conserve à l'égard de ces valeurs quelconques, réelles ou imaginaires, la propriété caractéristique des exposants, savoir

$$e^x \times e^y = e^{x+y}.$$

A cet effet, je remplace dans cette égalité x et y par αx et αy, ce qui donne

$$e^{\alpha x} \times e^{\alpha y} = e^{\alpha(x+y)},$$

et j'observe qu'en supposant x, y et α réels, je suis assuré que les coefficients des mêmes puissances de α sont égaux dans les deux membres, c'est-à-dire d'une part dans le produit ordonné par rapport à α des deux séries

$$1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^m x^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

$$1 + \frac{\alpha y}{1} + \frac{\alpha^2 y^2}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^m y^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

et de l'autre dans le développement

$$1 + \frac{\alpha(x+y)}{1} + \frac{\alpha^2(x+y)^2}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^m(x+y)^m}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

En égalant ainsi les coefficients de α^m, et multipliant par

$1.2\ldots m$, on obtiendrait, si on ne la connaissait déjà, la formule du binôme, savoir

$$x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2 + \ldots + y^m = (x+y)^m.$$

Mais ce n'est pas cette conclusion qui nous importe en ce moment; il suffit, en effet, d'avoir entre des polynômes en x et en y une égalité démontrée à l'égard de toutes les valeurs réelles de ces quantités, pour être en droit d'en conclure qu'elle a lieu pareillement pour des valeurs imaginaires. A la vérité, nous admettons ainsi que le degré de ces polynômes, le nombre m, soit fini et limité; mais la convergence des séries permet de les borner à un nombre fini de termes, le reste pouvant devenir moindre que toute quantité donnée, et la conclusion est établie, comme on voit, en toute rigueur.

II. On vient de reconnaître combien il y a d'avantage à définir par la série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$ la fonction exponentielle e^x. Telle propriété toutefois, comme celle d'être essentiellement positive pour toute valeur réelle de x, pourra sembler moins facile à voir dans la série que dans la première définition de la fonction où elle est manifeste. Je vais m'y arrêter un moment.

Désignons par $\varphi(x)$ l'ensemble des $m+1$ premiers termes, en posant

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m},$$

on trouvera aisément la relation

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \frac{x^m}{1.2\ldots m};$$

or elle suffit pour prouver que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a jamais plus d'une racine réelle. Admettons, pour un instant, qu'il n'en soit pas ainsi, et nommons α et β deux racines réelles consécutives de cette équation, on trouvera

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{\alpha^m}{1.2\ldots m}, \quad \varphi'(\beta) = -\frac{\beta^m}{1.2\ldots m},$$

résultats de même signe, car l'équation proposée ayant tous ses coefficients positifs, les racines α et β, si elles existent, sont l'une et l'autre négatives. Or, on se trouve ainsi en contradiction avec le théorème de Rolle, de sorte que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle si son degré est impair, et elle n'en a aucune si son degré est pair. On pourrait certainement faire voir que, pour des valeurs croissantes de m, la racine unique augmente indéfiniment en valeur négative, mais je m'en tiendrai à la conclusion relative au cas de m pair, qui met en évidence la propriété annoncée, puisqu'un polynôme qui n'a point de racines réelles garde le même signe pour toute valeur de la variable.

III. L'une des conséquences les plus importantes et les plus remarquables de la notion de l'exponentielle, pour des valeurs imaginaires de la variable, consiste à rattacher à cette fonction les quantités $\sin x$ et $\cos x$, à l'égard desquelles j'admettrai les développements en série

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

que donnent aisément leurs propriétés les plus élémentaires.

Il suffit, à cet effet, de changer x en $x\sqrt{-1}$ dans la série qui représente e^x, ce qui conduit à la relation

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

On aurait de même

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

et l'on en tire ces formules, savoir

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\tang x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}.$$

C'est à Euler qu'est due la relation si importante

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

et qui va nous donner la définition de la fonction logarithmique pour des valeurs imaginaires quelconques $a + b\sqrt{-1}$. Nous allons, à cet effet, déterminer toutes les solutions de l'équation

$$e^z = a + b\sqrt{-1},$$

en supposant

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

ce qui conduira, en vertu de la formule

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

aux deux équations suivantes

$$e^x \cos y = a, \quad e^x \sin y = b,$$

dont il faut avoir toutes les solutions réelles. Or, en élevant au carré et ajoutant, il vient

$$e^{2x} = a^2 + b^2.$$

et, par suite,

$$e^x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

en excluant la valeur négative du radical, afin de rejeter les valeurs non réelles de x, qui sera, par conséquent, le logarithme népérien arithmétique de $\sqrt{a^2 + b^2}$. De là suit que l'angle y sera déterminé à la fois par ces deux équations

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Elles donnent un seul et unique angle α (*) entre les limites zéro et 2π, et pour solution générale

$$y = \alpha + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. C'est la présence de cet entier indéterminé qui conduit à attribuer à la fonction logarithmique, considérée sous le point de vue général auquel nous sommes placés, son véritable caractère analytique de fonction susceptible d'une infinité de déterminations. Et l'on observe que ce caractère se présente même à l'égard des logarithmes des quantités réelles; car en supposant dans l'équation que nous venons d'obtenir

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \log\sqrt{a^2 + b^2} + (\alpha + 2k\pi)\sqrt{-1},$$

$b = 0$ et a positif, ce qui donne $\alpha = 0$, on obtient encore une infinité de valeurs $\log a + 2k\pi\sqrt{-1}$, dont une seule réelle pour $k = 0$. Ainsi s'explique l'impossibilité d'avoir pour $\log x$ un développement en série toujours convergent, quel que soit x, comme on l'a obtenu pour $\sin x$, $\cos x$, e^x. Un tel développement ne pourrait convenir qu'à une fonction uniforme, et bientôt, en effet, en établissant l'équation

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

nous verrons qu'il faut la restreindre aux valeurs de la variable dont le module est moindre que l'unité.

(*) On doit à M. Winckler la remarque suivante : Soit $a = \varepsilon A$, $b = \eta B$, ε et η étant égaux à $+1$ ou -1, de sorte que A et B représentent les valeurs numériques absolues de a et b, l'angle α sera déterminé par l'équation

$$\pi - \alpha = \frac{\varepsilon\pi}{2} + \varepsilon\eta \operatorname{arc\,tang} \frac{A}{B},$$

l'arc dont la tangente est $\frac{A}{B}$ étant positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$. Dans le cas de a ou b nul, ε ou η devra être pris égal à l'unité (*Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis; Acad. des Sciences de Vienne*, 1869).

IV. Les formules

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

conduisent à transformer l'expression $z = \sin^a x \cos^b x$ en une fonction linéaire des sinus ou cosinus des arcs multiples de x, lorsque les exposants a et b sont entiers. Pour obtenir ce résultat, qui sera employé dans le Calcul intégral, je pose pour un instant $t = e^{x\sqrt{-1}}$ et $a + b = n$, ce qui donnera

$$z = \left(\frac{t - t^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^a \left(\frac{t + t^{-1}}{2}\right)^b,$$

et, en chassant le dénominateur,

$$2^n \left(\sqrt{-1}\right)^a t^n z = (t^2 - 1)^a (t^2 + 1)^b.$$

Or le second membre, ne contenant que le carré de t, peut être développé sous cette forme

$$(t^2 - 1)^a (t^2 + 1)^b = \alpha_0 t^{2n} + \alpha_1 t^{2(n-1)} + \ldots + \alpha_i t^{2(n-i)} + \ldots + \alpha_n,$$

les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ étant des nombres satisfaisant, comme je vais le montrer, à la condition suivante

$$\alpha_i = (-1)^a \alpha_{n-i}.$$

Écrivons, en effet, pour abréger,

$$(t^2 - 1)^a (t^2 + 1)^b = \Sigma \alpha_i t^{2(n-i)},$$

puis changeons t en $\frac{1}{t}$, et chassons le dénominateur, il viendra

$$(1 - t^2)^a (1 + t^2)^b = \Sigma \alpha_i t^{2i};$$

ce qui reproduit dans le premier membre l'expression proposée multipliée par le facteur $(-1)^a$; or, l'identité

$$(-1)^a \Sigma \alpha_i t^{2(n-i)} = \Sigma \alpha_i t^{2i}$$

donne bien, en égalant les coefficients de t^{2i} de part et d'autre, la relation annoncée. Revenons maintenant à l'expression de z

qu'on trouvera, en divisant le polynôme $(t^2-1)^n(t^2+1)^b$ par t^n, sous cette forme

$$2^n\left(\sqrt{-1}\right)^a z = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-2}} + \frac{\alpha_n}{t^n};$$

et, considérant d'abord le cas où le nombre a est pair, ce qui donnera

$$\alpha_i = \alpha_{n-i},$$

je l'écrirai ainsi

$$2^n(-1)^{\frac{1}{2}a} z = \alpha_0\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) + \alpha_1\left(t^{n-2} + \frac{1}{t^{n-2}}\right) + \ldots,$$

en laissant dans le second membre, quand n est un nombre pair, le seul terme $\alpha_{\frac{1}{2}n}$ indépendant de t. J'observerai ensuite qu'on a généralement

$$t^\mu = e^{\mu x\sqrt{-1}} = \cos\mu x + \sqrt{-1}\,\sin\mu x,$$

$$\frac{1}{t^\mu} = e^{-\mu x\sqrt{-1}} = \cos\mu x - \sqrt{-1}\,\sin\mu x,$$

d'où

$$t^\mu + \frac{1}{t^\mu} = 2\cos\mu x,$$

de sorte qu'on en conclut immédiatement la valeur de z sous la forme annoncée, savoir

$$2^n(-1)^{\frac{1}{2}a} z = 2\alpha_0\cos nx + 2\alpha_1\cos(n-2)x + \ldots,$$

le second membre contenant, comme il a été remarqué plus haut, le terme $\alpha_{\frac{1}{2}n}$ indépendant de x, quand n est pair.

En second lieu, si l'exposant a du sinus est impair, ce qui donnera

$$\alpha_i = -\alpha_{n-i},$$

nous écrirons

$$2^n\left(\sqrt{-1}\right)^a z = \alpha_0\left(t^n - \frac{1}{t^n}\right) + \alpha_1\left(t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}}\right) + \ldots,$$

le second membre ne renfermant plus comme précédemment, pour n pair, de terme indépendant de t, car la condition à laquelle satisfont les coefficients donne, pour $i = \frac{n}{2}$,

$\alpha_{\frac{n}{2}} = -\alpha_{\frac{n}{2}}$, c'est-à-dire $\alpha_{\frac{n}{2}} = 0$. On en conclut encore immédiatement, en employant la relation

$$t^\mu - \frac{1}{t^\mu} = 2\sqrt{-1}\sin\mu x,$$

et, divisant par $\sqrt{-1}$,

$$2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} z = 2\alpha_0 \sin nx + 2\alpha_1 \sin(n-2)x + \ldots.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$; or un premier moyen serait d'effectuer la multiplication algébrique des puissances $(x-1)^a$ et $(x+1)^b$; mais en voici un autre. Soit

$$y = (x-1)^a(x+1)^b = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots;$$

on aura

$$\log y = a\log(x-1) + b\log(x+1),$$

et, en prenant les dérivées par rapport à x,

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1},$$

d'où

$$y'(x^2-1) = y[(a+b)x + a - b].$$

Substituant, dans cette relation, les deux développements

$$y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots,$$
$$y' = n\alpha_0 x^{n-1} + (n-1)\alpha_1 x^{n-2} + \ldots,$$

et faisant de suite $\alpha_0 = 1$, on en conclura, en posant, pour abréger, $b - a = p$, les relations qui suivent

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p, \\ 2\alpha_2 &= p\alpha_1 - n, \\ 3\alpha_3 &= p\alpha_2 - (n-1)\alpha_1, \\ 4\alpha_4 &= p\alpha_3 - (n-2)\alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

Soient, par exemple,

$$a = 2, \quad b = 5,$$

d'où

$$n = 7, \quad p = 3,$$

ces relations deviendront

$$\alpha_1 = 3, \quad 2\alpha_2 = 3\alpha_1 - 7, \quad 3\alpha_3 = 3\alpha_2 - 6\alpha_1.$$

d'où

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -5,$$

et on en conclura la relation

$$2^6 \sin^2 x \cos^5 x = -\cos 7x - 3\cos 5x - \cos 3x + 5\cos x;$$

on trouverait de même

$$2^7 \sin^3 x \cos^5 x = -\sin 8x - 2\sin 6x + 2\sin 4x + 6\sin 2x,$$
$$2^9 \sin^4 x \cos^6 x = \cos 10x + 2\cos 8x - 3\cos 6x - 8\cos 4x + 2\cos 2x + 6.$$

L'expression générale des coefficients α n'est connue, d'après l'équation $y = (x-1)^a(x+1)^b$, que dans le cas où l'un des exposants a ou b est nul, ou bien s'ils sont égaux entre eux; toutefois, en supposant que a et b soient des nombres pairs quelconques, on a, pour celui de ces coefficients qu'il importe particulièrement de considérer, l'expression simple que voici

$$\alpha_{\frac{1}{2}n} = 2^{\frac{1}{2}n} \frac{1.3.5\ldots(a-1)1.3.5\ldots(b-1)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}n}.$$

De la périodicité dans les fonctions circulaires.

I. Cette propriété importante manifeste d'une manière toute particulière la différence de nature des fonctions qui la possèdent, avec les fonctions rationnelles et algébriques dont nous nous sommes occupé précédemment, et leur imprime leur caractère le plus apparent, en quelque sorte, de fonctions transcendantes. C'est d'ailleurs par la périodicité que les sinus et cosinus interviennent dans presque toutes les questions de l'Analyse, depuis les études qui ont pour objet les propriétés abstraites des nombres entiers, jusqu'aux applications du calcul à la Physique et à l'Astronomie. Tel est, en effet, le caractère d'universalité de ces fonctions que, dans l'Ouvrage intitulé : *Disquisitiones arithmeticæ*, Gauss s'exprime dans les termes suivants : « ..... *Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maximè heterogeneis sæpissimè de-*

ferimur, cujusque subsidio nulla Matheseos pars carere potest..... » Mais si la définition géométrique des fonctions circulaires met immédiatement en évidence tout ce qui concerne leur périodicité, cette propriété semble beaucoup plus cachée dans les développements en série tels que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Aussi n'est-il pas inutile d'indiquer d'autres expressions analytiques où elle se reconnaîtra tout aussi facilement que par la considération du cercle. Tel est, par exemple, ce développement en produit infini

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cdots.$$

Qu'on prenne, en effet, le polynôme

$$F(x) = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

ou encore, en désignant par A un facteur numérique,

$$F(x) = Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(x+1)(x+2)\ldots(x+n),$$

et on verra bien aisément que

$$F(x+1) = F(x)\frac{x+n+1}{x-n};$$

d'où, pour n infini,

$$F(x+1) = -F(x),$$

et, par conséquent,

$$F(x+2) = +F(x).$$

Tel est encore le développement qu'on trouve en prenant la dérivée logarithmique de $\sin \pi x$, savoir

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \frac{2x}{x^2-9} + \ldots,$$

car, en l'écrivant ainsi

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots,$$

le second membre devient, si l'on change x en $x+1$,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \ldots,$$

et, par conséquent, la suite infinie des fractions simples se reproduit, car elles n'ont fait que changer de place en s'avançant chacune d'un rang (*).

Ce résultat suggère, par une généralisation facile, le mode suivant de représentation d'une fonction $\Phi(x)$ ayant pour période une quantité quelconque, à savoir

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \varphi(x-a) + \varphi(x-2a) + \varphi(x-3a) + \ldots$$
$$+ \varphi(x+a) + \varphi(x+2a) + \varphi(x+3a) + \ldots,$$

ou bien

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \varphi(x+na),$$

la condition de convergence de la série étant seule à remplir à l'égard de $\varphi(x)$. Et, si l'on alterne les signes en supposant

$$\Psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \varphi(x+na),$$

(*) M. Tchebichew a donné un exemple très-remarquable d'un autre mode d'expression des fonctions périodiques dans la formule suivante. Soit (x) la plus petite quantité qu'il faut ajouter à x ou retrancher de x pour avoir un nombre entier, on aura

$$\frac{4\sin^2 \pi x}{\pi^2} = \frac{(x)}{1^2} - \frac{(3x)}{3^2} - \frac{(5x)}{5^2} - \ldots = \sum \alpha_n \frac{(nx)}{n^2},$$

le coefficient α_n étant nul quand n est pair ou divisible par un carré, et ayant pour valeur $+1$ ou -1 suivant que le nombre des diviseurs premiers de n sera pair ou impair (*Journal de Mathématiques de M. Liouville*, t. XVI, p. 342). La fonction numérique désignée par (x), qui, par sa définition même, admet l'unité pour période, joue un rôle important dans l'Arithmétique supérieure.

on trouvera tout aussi aisément la relation

$$\Psi(x+a) = -\Psi(x).$$

De là résulte un nombre infini de fonctions périodiques, mais qui se ramènent aux sinus et cosinus. On démontre effectivement qu'on peut faire

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{4\pi x}{a} + \ldots + A_n \cos\frac{2n\pi x}{a} + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{4\pi x}{a} + \ldots + B_n \sin\frac{2n\pi x}{a} + \ldots,$$

et

$$\Psi(x) = A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots + A_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{a} + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots + B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a} + \ldots,$$

la principale propriété de ces séries consistant en ce que les coefficients A_n, B_n décroissent quand n augmente, de manière qu'elles sont toujours convergentes du moment que les fonctions restent elles-mêmes finies. Ce fait peut déjà s'observer sur les expressions de cette nature qu'on tire de la méthode du paragraphe précédent et qui ne renferment qu'un nombre fini de termes, savoir

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$
$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x,$$
$$32\cos^6 x = 10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x,$$
$$128\cos^8 x = 35 + 56\cos 2x + 28\cos 4x + 8\cos 6x + \cos 8x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$
$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x,$$
$$16\cos^5 x = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x,$$
$$64\cos^7 x = 35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Toutefois, il peut y avoir avantage à se servir des expressions précédentes; en voici un exemple remarquable et important.

II. Soit, pour abréger l'écriture, $i = \sqrt{-1}$, et nommons a et b deux constantes telles, qu'en faisant

$$\frac{a}{b} = \alpha + i\beta,$$

la quantité β soit positive et différente de zéro. Si l'on suppose

$$\varphi(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}},$$

on obtiendra les développements indiqués par

$$\theta(x) = \Sigma(-1)^n e^{\frac{i\pi}{ab}(x+na)^2},$$

$$\theta_1(x) = \Sigma e^{\frac{i\pi}{ab}(x+na)^2},$$

qui seront convergents sous cette condition, non-seulement pour des valeurs réelles, mais aussi pour des valeurs imaginaires de la variable, comme l'exponentielle e^x. Or ces fonctions périodiques, $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$, sont les transcendantes qui, s'offrant immédiatement après les fonctions circulaires, constituent le sujet d'une branche d'Analyse qu'on nomme la *théorie des fonctions elliptiques*. Ces quantités se lient par leurs propriétés fondamentales aux sinus et aux cosinus, et conduisent immédiatement aux *fonctions doublement périodiques*. En effet, chacune d'elles ayant pour période $2a$, je dis que leur quotient

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$$

possède, de plus, la période b.

Pour le reconnaître, nous développerons l'exponentielle, et faisant, pour abréger, $q = e^{i\pi\frac{a}{b}}$, nous écrirons

$$\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2} e^{2n\frac{i\pi x}{b}},$$

ou encore

$$\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2}\left(\cos 2n\frac{\pi x}{b} + i\sin 2n\frac{\pi x}{b}\right),$$

et, plus simplement,

$$\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b},$$

si l'on observe que, le nombre n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les sinus se détruisent comme égaux deux à deux et de signes contraires. Or, on aurait tout à fait de même

$$\theta(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b},$$

de sorte qu'en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur $e^{\frac{i\pi x^2}{ab}}$ on parvient à cette expression

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)} = \frac{\sum q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b}}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b}},$$

où la seconde période b se trouve mise en évidence.

La définition de ces nouveaux éléments du calcul, qui étendent le champ de l'Analyse envisagée dans son objet le plus général, l'étude des fonctions, terminera les considérations préliminaires que nous avions à présenter avant d'aborder le Calcul différentiel, dont nous allons maintenant exposer les principes.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIERS PRINCIPES.

Série de Taylor.

I. La notion de la dérivée se présente en Algèbre, à l'égard d'un polynôme entier $F(x)$, au commencement de la théorie générale des équations, lorsqu'on recherche le développement de $F(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h, et l'on obtient ainsi, n désignant le degré du polynôme, l'équation

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(x).$$

La série de Taylor n'est autre chose que ce résultat étendu à une fonction quelconque et voici les considérations qui y conduisent.

En premier lieu, l'équation précédente, mise sous la forme

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2}F''(x) + \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n}F^{(n)}(x),$$

montre que la dérivée $F'(x)$ peut être définie comme la limite du premier membre quand l'accroissement h tend vers zéro. Or cette remarque conduit à considérer une pareille limite à l'égard d'une fonction quelconque $f(x)$, et, par suite, sans recourir à aucun développement en série, à étendre à toute fonction la notion de la dérivée, en la définissant encore comme la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pour $h=0$.

Cette définition se justifie, comme on sait, par les conséquences importantes qu'on en tire pour toutes les fonctions continues; je rappellerai particulièrement les suivantes :

Une fonction dont la dérivée est nulle pour toutes les valeurs comprises de $x = x_0$ à $x = X$ est constante dans le même intervalle.

Si la dérivée d'une fonction est toujours positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, la fonction, dans le même intervalle, est continuellement croissante avec x.

Lorsqu'une fonction continue est nulle pour deux valeurs x_0 et X, la dérivée, si elle est elle-même continue, s'annule pour une valeur comprise entre x_0 et X.

C'est cette dernière proposition, c'est-à-dire le théorème de Rolle, jointe aux règles de calcul établies si facilement en Algèbre pour la formation des dérivées de sommes, de produits et de puissances de fonctions, qui nous suffira pour établir la série de Taylor.

Considérons, en effet, l'expression

$$R = f(X) - f(x) - \frac{X-x}{1} f'(x) - \frac{(X-x)^2}{1.2} f''(x) - \ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

qui s'annule identiquement quand $f(x)$ est un polynôme entier du degré $n-1$, comme on le voit en développant $f(X)$ écrit sous cette forme $f[x + (X-x)]$, et cherchons à la déterminer lorsque $f(x)$ est une fonction quelconque. Soit pour cela, p désignant une quantité positive quelconque non supérieure à n,

$$R = \frac{(X-x)^p}{p} P,$$

de sorte que l'on ait

$$f(X) - f(x) - \frac{(X-x)}{1} f'(x) - \ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) - \frac{(X-x)^p}{p} P = 0.$$

En remplaçant x par z dans tous les termes du premier

membre de cette équation, excepté dans P, je serai conduit à l'expression suivante

$$f(X)-f(z)-\frac{(X-z)}{1}f'(z)-\ldots$$
$$-\frac{(X-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)-\frac{(X-z)^p}{p}P,$$

qui s'annulera d'abord pour $z=x$, et en second lieu, évidemment, pour $z=X$, de sorte que sa dérivée par rapport à z sera nulle pour une certaine valeur de cette quantité comprise entre x et X. Or cette dérivée se réduit à cette expression très-simple

$$-\frac{(X-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)+(X-z)^{p-1}P$$
$$=(X-z)^{p-1}\left[P-\frac{(X-z)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)\right],$$

et la valeur de z pour laquelle elle s'annule, étant comprise entre x et X, peut être représentée par $x+\theta(X-x)$, θ étant moindre que l'unité. Il vient donc

$$P=\frac{(1-\theta)^{n-p}(X-x)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[x+\theta(X-x)],$$

et, par suite,

$$R=\frac{(1-\theta)^{n-p}(X-x)^n}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}[x+\theta(X-x)].$$

En posant enfin $X-x=h$, on a le résultat auquel nous nous sommes proposé de parvenir, savoir

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\theta)^{n-p}h^n}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+\theta h).$$

C'est à M. Rouché qu'est due la démonstration précédente de cette forme du reste de la série de Taylor, donnée pour la première fois par M. Schlömich et par M. Roche (*Journal de Mathématiques de M. Liouville*, 2e série, t. III, p. 271). Il y figure un nombre indéterminé p, et, en supposant $p=n$ et $p=1$, on parvient aux expressions de Lagrange et de Cauchy,

dont il est fait surtout usage, savoir

$$R = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x + \theta h),$$

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x + \theta h).$$

Mais le principe même de cette démonstration si simple, qui repose sur le théorème de Rolle, appartient à M. Hommersham Cox, ainsi qu'on peut le voir dans l'Ouvrage de M. Todhunter (*A Treatise on the differential Calculus*).

II. Les résultats qui viennent d'être établis, en se plaçant essentiellement au point de vue des fonctions réelles et des variables réelles (*), supposent que la fonction $f(x)$ et ses n premières dérivées soient continues pour les valeurs de la variable comprises entre x et $x + h$. En supposant $x = 0$, et remplaçant h par x, on en déduit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R,$$

le terme complémentaire désigné par R étant susceptible de ces deux formes principales, savoir

$$R = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\theta x),$$

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(\theta x).$$

C'est ce qu'on nomme la formule de Maclaurin, identique au fond avec celle de Taylor; car elle donne le développement d'une fonction de x suivant les puissances de x, et la série de Taylor, le développement d'une fonction de h suivant les puissances de h. Il n'y a qu'un petit nombre de fonctions auxquelles la formule de Maclaurin s'applique avec simplicité, ce sont celles-ci : a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$ et $(1 + x)^a$; nous allons les considérer successivement.

(*) C'est seulement dans le Calcul intégral qu'on traitera du développement des fonctions en série dans le cas le plus général des variables imaginaires quelconques.

Développement de a^x. — En posant

$$f(x) = a^x,$$

on obtient immédiatement

$$f'(x) = a^x \log a,\quad f''(x) = a^x \log^2 a, \ldots,$$

et généralement

$$f^{(n)}(x) = a^x \log^n a.$$

On en conclut

$$f^{(n)}(0) = \log^n a\,;$$

d'où la série connue

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1} \log^{n-1} a}{1.2\ldots(n-1)} + \mathrm{R},$$

et, en employant la première forme du reste, on aura

$$\mathrm{R} = \frac{x^n \log^n a}{1.2\ldots n} a^{\theta x}.$$

La convergence de la série ayant été déjà établie, il suffit de reconnaître que R décroît indéfiniment quand n augmente. Or cela est évident; car le facteur $a^{\theta x}$ ne dépend de n que par la quantité θ dont le maximum est l'unité, de sorte qu'il a pour limite supérieure a^x, et quant à l'autre facteur $\frac{x^n \log^n a}{1.2\ldots n}$, on sait qu'il décroît indéfiniment, quel que soit x.

Développements de $\sin x$ et $\cos x$. — Posons, pour obtenir la dérivée d'ordre n de $\sin x$,

$$f(x) = \sin(x + \alpha),$$

α étant une constante, on aura

$$f'(x) = \cos(x + \alpha) = \sin\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

de sorte qu'on passe de $\sin(x + \alpha)$ à sa dérivée, en changeant simplement α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$. On conclut de là, quel que soit n,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \alpha + \frac{n\pi}{2}\right),$$

et, par conséquent, pour $\alpha = 0$,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Or l'expression $f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$ donne, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, une suite périodique dont la période est $0, 1, 0, -1$, et l'on retrouve le développement

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)} + R,$$

en posant

$$R = \frac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)}\sin\left[\theta x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right].$$

Ce reste est moindre que $\dfrac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)}$, et a donc encore zéro pour limite quand m augmente indéfiniment.

Relativement à $\cos x$, on obtiendra semblablement pour sa $n^{ième}$ dérivée l'expression $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, donnant de même, pour $x = 0$, une suite périodique dont la période est $1, 0, -1, 0$, ce qui reproduira le développement connu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \ldots,$$

qu'on aurait pu conclure du précédent, en en prenant la dérivée par rapport à x.

Développement de $\log(1+x)$. — Pour obtenir la dérivée $n^{ième}$ de $f(x) = \log(1+x)$, il convient de poser

$$f'(x) = (1+x)^{-1},$$

afin d'appliquer la règle relative à la dérivée des puissances d'un binôme. De cette manière, on trouve immédiatement

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2},\quad f'''(x) = 1.2(1+x)^{-3},\quad f^{\text{IV}}(x) = -1.2.3(1+x)^{-4},$$

et, par suite,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n}.$$

On en conclut

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1,\ldots,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1),$$

d'où

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+\mathrm{R}.$$

Mais la série contenue dans cette formule n'est pas convergente lorsque la valeur absolue de x est supérieure à 1, car le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent, savoir $\dfrac{x}{1+\frac{1}{n}}$, a pour limite x, n étant infini; de sorte que le développement donné par la formule de Maclaurin ne peut subsister que pour les valeurs de la variable comprises entre -1 et $+1$, et il sera alors effectivement applicable si $\mathrm{R}=0$ pour n infini. Considérons, pour le voir, la seconde forme du reste

$$\mathrm{R}=(-1)^{n-1}\frac{(1-\theta)^{n-1}.x^n}{(1+\theta x)^n},$$

que j'écrirai ainsi

$$\mathrm{R}=\frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}x^n.$$

La quantité $1+\theta x$ étant toujours supérieure à $1-\theta$, il en résulte que $\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ a l'unité pour maximum; mais, dans l'hypothèse admise, le facteur x^n décroît indéfiniment, de sorte qu'en définitive $\mathrm{R}=0$ pour n infini. La série proposée

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

a donc lieu pour les valeurs de la variable comprises entre -1 et $+1$.

J'ajoute, afin de donner un exemple de l'emploi de la première forme du reste de la formule de Maclaurin

$$\mathrm{R}=\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x),$$

que la convergence subsiste même dans le cas limite de $x=1$.

On a, en effet,

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

et, en supposant $x = 1$,

$$R = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n},$$

quantité qui s'annule évidemment quand n devient infini.

La série ainsi obtenue, étant écrite de cette manière

$$\log 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots\right),$$

se présente comme la limite de la différence des deux quantités

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

qui croissent indéfiniment avec n. C'est le type des séries nommées par Dirichlet *semi-convergentes*, et dont la valeur dépend de l'ordre dans lequel on ajoute les termes. Soient en général S_n et S_m les sommes des n et m premiers termes de deux suites supposées infinies avec n et m, et faisons, pour un instant,

$$S_n = \log \Sigma_n, \quad S_m = \log \Sigma_m,$$

la différence $S_n - S_m = \log \frac{\Sigma_n}{\Sigma_m}$ s'exprimera ainsi par le rapport $\frac{\Sigma_n}{\Sigma_m}$. Or on ne peut obtenir une valeur déterminée pour une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ qu'autant que les deux termes ne contiennent qu'une seule et unique variable, à laquelle on attribue la valeur particulière conduisant à la forme de l'indétermination. Prendre autant de termes positifs que de termes négatifs dans la série obtenue pour $\log 2$, c'est supposer $n = m$, et l'emploi du reste

$$R = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n}$$

répond précisément à cette supposition. Mais la différence entre la somme des n premiers termes positifs et des n premiers termes négatifs tend, lorsque n et m augmentent, vers la quantité

$$\log 2 + \log \frac{n}{m}$$

entièrement indéterminée, comme dépendant du rapport arbitraire $\frac{n}{m}$ qu'on peut établir entre ces deux nombres en les faisant croître indéfiniment.

Développement de $(1+x)^a$. — Les dérivées successives de $f(x) = (1+x)^a$ s'obtiennent immédiatement, et l'on a

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n},$$

d'où

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1),$$

et, par conséquent,

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + \text{R}.$$

J'adopterai encore la seconde forme à l'égard du reste, en écrivant

$$\text{R} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{a-n}.$$

Cela posé, le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$ terme de la série étant $\frac{a-n+1}{n}x$, dont la limite est $-x$ pour n infini, la formule ne peut subsister que si x est compris entre -1 et $+1$, comme dans le cas précédent. En nous plaçant dans cette hypothèse, écrivons la valeur de R de cette manière (*)

$$\text{R} = \left[\frac{ax}{1}\frac{(a-1)x}{2}\cdots\frac{(a-n+2)x}{n-1}\right]x\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{a-1}.$$

Il est aisé de voir que la quantité entre crochets tend vers zéro quand n augmente; en effet, quand n croît de l'unité,

(*) M. SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 176.

elle acquiert le facteur $-x\left(1-\frac{a+1}{n}\right)$ qui a $-x$ pour limite. Cette quantité est donc un produit dans lequel les facteurs plus grands que un, en valeur absolue, sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux dont la valeur absolue est inférieure à une quantité donnée comprise entre x et 1 augmente indéfiniment. D'ailleurs l'expression $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ a pour maximum l'unité, de sorte que la limite de R est bien égale à zéro, et la formule du binôme subsiste, quel que soit l'exposant, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Quant à ces valeurs limites, à l'égard desquelles on ne peut rien conclure de ce qui précède, je me borne à énoncer que, pour a positif, la formule a lieu en faisant $x=\pm 1$, mais seulement pour $x=1$, lorsque l'exposant est compris entre zéro et -1. Dans les autres cas, la série est divergente.

III. La série de Taylor s'étend aux fonctions de deux variables, de manière à donner, par exemple, le développement suivant les puissances de h et de k, de $f(x+h, y+k)$.

Voici, à ce sujet, la méthode employée par Lagrange dans les *Leçons sur le Calcul des fonctions*. Représentant par $f_{x^n}^{(n)}(x, y)$ la $n^{ième}$ dérivée de $f(x, y)$, prise par rapport à la variable x, on pourra écrire

$$f(x+h, y)=f(x, y)+\frac{h}{1}f_x(x, y)+\frac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x, y)+\ldots$$
$$=\sum \frac{h^n}{1.2\ldots n}f_{x^n}^{(n)}(x, y).$$

Cela posé, changeons, dans les deux membres, y en $y+k$, et désignons par $f_{x^n y^p}^{(n+p)}(x, y)$ la dérivée d'ordre p, prise par rapport à y, de la dérivée $n^{ième}$ prise par rapport à x, on aura

$$f_{x^n}^{(n)}(x, y+k)=\sum \frac{k^p}{1.2\ldots p}f_{x^n y^p}^{(n+p)}(x, y),$$

et, par conséquent,

$$f(x+h, y+k)=\sum\sum \frac{h^n k^p}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots p}f_{x^n y^p}^{(n+p)}(x, y),$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives des nombres n et p. Lagrange ajoute que l'on aurait identiquement le même résultat, si l'on commençait l'opération par la substitution de $y+k$ à la place de y, et le développement suivant les puissances croissantes de k, et que l'on fît ensuite la substitution de $x+h$ pour x, et le développement suivant les puissances de h. Or, de cette seconde manière, on obtiendrait, pour terme général de la série, l'expression

$$\frac{h^n k^p}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p} f_{y^p x^n}^{(n+p)}(x, y),$$

de sorte qu'on doit nécessairement avoir

$$f_{x^n y^p}^{(n+p)}(x, y) = f_{y^p x^n}^{(n+p)}(x, y),$$

relation d'une grande importance et montrant que, à l'égard des fonctions de deux variables, l'ordre des dérivations par rapport à l'une et à l'autre variable peut être interverti sans changer la valeur du résultat final.

Mais je reviens à la série précédente, pour la présenter sous une autre forme. En groupant les termes du même degré en h et en k, on peut l'écrire ainsi

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf'_x(x, y) + \left.\begin{matrix} h^2 f''_{x^2}(x, y) \\ + 2hkf''_{xy}(x, y) \\ + k^2 f''_{y^2}(x, y) \end{matrix}\right| \frac{1}{1.2} + \ldots,$$
$$+ kf'_y(x, y)$$

et l'ensemble des termes du $n^{ième}$ ordre sera

$$\left[h^n f_{x^n}^{(n)}(x, y) + \frac{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y}^{(n)}(x, y) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{n}{1} h k^{n-1} f_{xy^{n-1}}^{(n)}(x, y) + k^n f_{y^n}^{n}(x, y)\right] \frac{1}{1.2\ldots n},$$

les coefficients numériques étant évidemment ceux de la puissance $n^{ième}$ du binôme; c'est à ce résultat qu'on parvient, d'une autre manière, en posant

$$F(t) = f(x+ht, y+kt),$$

développant $F(t)$, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances de t, et posant enfin dans le résultat $t=1$. L'avantage de cette méthode consiste à pouvoir donner une expression du reste de la série, bornée à un nombre fini de termes, mais cette expression compliquée paraît peu utile, et n'a jamais reçu une seule application.

Remarques sur le développement des fonctions par la formule de Maclaurin.

I. Parmi les fonctions simples auxquelles on a précédemment appliqué le théorème de Maclaurin, les unes, comme e^x, $\sin x$, $\cos x$, et $(1+x)^a$, quand l'exposant est entier et positif, conduisent à des séries subsistant dans toute l'étendue des valeurs réelles ou imaginaires de la variable. Celles-ci, au contraire, $\log(1+x)$ et $(1+x)^a$, a n'étant plus entier et positif, ne se développent qu'en supposant la variable, en valeur absolue, inférieure à l'unité. Ce fait analytique tient à une différence de nature entre les deux groupes de fonctions, que la considération des variables imaginaires rendra manifeste.

J'observe d'abord qu'en faisant

$$x=\rho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$$

dans une série

$$\Sigma A_n x^n,$$

où les exposants de la variable sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on obtient pour résultat cette expression

$$\Sigma A_n \rho^n \cos n\omega+\sqrt{-1}\,\Sigma A_n \rho^n \sin n\omega,$$

dont les deux parties reprennent la même valeur quand on y change ω en $\omega+2\pi$ si le module ρ, par exemple, est constant.

Or, en écrivant

$$1+x=R(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on a vu plus haut que l'angle φ devient $\varphi+2\pi$, quand on remplace ω par $\omega+2\pi$, lorsqu'on suppose ρ supérieur au module de -1, c'est-à-dire à l'unité. Par conséquent, il est alors

impossible que les quantités

$$\log(1+x) = \log R + \varphi\sqrt{-1},$$
$$(1+x)^a = R^a(\cos a\varphi + \sqrt{-1}\sin a\varphi)$$

soient développables sous la forme $\Sigma A_n x^n$, puisqu'en changeant ω en $\omega + 2\pi$, ni l'une ni l'autre ne se reproduisent. La première s'augmente effectivement de $2\pi\sqrt{-1}$, la seconde devient

$$R^a\left[\cos a(\varphi+2\pi) + \sqrt{-1}\sin a(\varphi+2\pi)\right] = \varepsilon R^a(\cos a\varphi + \sqrt{-1}\sin a\varphi),$$

et se trouve multipliée par le facteur

$$\varepsilon = \cos 2a\pi + \sqrt{-1}\sin 2a\pi,$$

qui est différent de l'unité, si l'exposant a n'est point entier.

Au contraire, en supposant $\rho < 1$, on a vu que φ ne change pas quand ω augmente de la circonférence; rien alors ne s'oppose plus à ce que les fonctions soient représentées par les séries que donne le théorème de Maclaurin. En effet, c'est ce qui a lieu, mais c'est seulement dans le Calcul intégral que ce théorème sera étendu aux valeurs imaginaires de la variable.

11. Le petit nombre d'applications qui ont été faites de la série de Maclaurin tient à la difficulté d'obtenir l'expression générale d'une dérivée d'ordre quelconque de la fonction qu'on veut développer, et qu'il est nécessaire de connaître pour former le reste. Cette série n'en est pas moins d'un usage continuel dans toutes les circonstances où l'on n'a besoin que des premiers termes, en négligeant la discussion du reste. Elle peut servir aussi dans des questions d'Analyse pure, et j'en donnerai un exemple qui permettra d'étendre ses applications, en recherchant la dérivée d'ordre n d'une fonction de fonction $f[\varphi(x)]$, ou bien $f(u)$, si l'on suppose, pour abréger, $u = \varphi(x)$. Cette dérivée étant le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans le développement de

$$f[\varphi(x+h)],$$

je partirai de la relation

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \ldots,$$

et faisant

$$\delta = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \ldots,$$

ou plutôt

$$\delta = \frac{h}{1}u' + \frac{h^2}{1.2}u'' + \frac{h^3}{1.2.3}u''' + \ldots,$$

je mettrai le développement cherché sous cette première forme

$$f[\varphi(x+h)] = f(u+\delta) = f(u) + \frac{\delta}{1}f'(u) + \frac{\delta^2}{1.2}f''(u) + \ldots$$
$$+ \frac{\delta^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(u) + \ldots.$$

Cela étant, il restera à calculer les puissances successives de δ, afin d'obtenir dans chacune d'elles le coefficient de h^n; mais h étant en facteur dans δ, on n'aura point à considérer les puissances $\delta^{n+1}, \delta^{n+2}, \ldots$, d'où l'on voit déjà que la dérivée cherchée sera de la forme

$$1.2\ldots n\left[A_1 f'(u) + \frac{A_2}{1.2}f''(u) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{A_i}{1.2\ldots i}f^{(i)}(u) + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(u)\right],$$

A_i étant le coefficient de h^n dans δ^i.

Soit, par exemple, $u = x^2$, on aura

$$\delta = 2hx + h^2 = h(2x+h).$$

et

$$\delta^i = h^i\left[(2x)^i + \frac{i}{1}(2x)^{i-1}h + \frac{i(i-1)}{1.2}(2x)^{i-2}h^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{1.2\ldots k}(2x)^{i-k}h^k + \ldots\right].$$

Nous obtiendrons donc le coefficient A_i en faisant $i + k = n$, c'est-à-dire $k = n - i$, ce qui donnera

$$A_i = \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(2i-n+1)}{1.2\ldots(n-i)}(2x)^{2i-n},$$

quantité qui s'annule tant qu'on ne suppose point $i > \frac{n-1}{2}$; de sorte qu'il convient d'écrire la formule en renversant

l'ordre des termes, et commençant par $f^{(n)}(u), f^{(n-1)}(u), \ldots$. Une réduction facile donne alors, pour la dérivée $n^{ième}$ de $f(x^2)$, cette expression

$$\begin{aligned}&(2x)^n f^{(n)}(u) + n(n-1)(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(u)\\&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(u) + \ldots\\&+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots k}(2x)^{n-2k} f^{(n-k)}(u) + \ldots,\end{aligned}$$

qui a d'importantes applications.

Soit encore

$$u = \frac{1}{x}, \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)},$$

et, par suite,

$$\delta^i = (-1)^i \frac{h^i(x+h)^{-i}}{x^i} = \frac{(-1)^i h^i}{x^i}\left[\frac{1}{x^i} - \frac{i}{1}\frac{h}{x^{i+1}} + \frac{i(i+1)}{1.2}\frac{h^2}{x^{i+2}} - \ldots\right],$$

on obtiendra semblablement (*)

$$A_i = \frac{(-1)^n}{x^{n+i}} \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-i)}.$$

Revenant au cas général, nous remarquerons qu'en vertu du théorème de Maclaurin, le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans le développement de la fonction

$$\delta^i = [\varphi(x+h) - \varphi(x)]^i$$

est la dérivée $n^{ième}$ de cette quantité, prise par rapport à h, quand on y aura fait $h = 0$. Cette dérivée, d'ordre n, se tire immédiatement du développement de la puissance

$$\delta^i = \varphi^i(x+h) - \frac{i}{1}\varphi^{i-1}(x+h)\varphi(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\varphi^{i-2}(x+h)\varphi^2(x)\ldots$$

et a pour valeur

$$\begin{aligned}&[\varphi^i(x+h)]^{(n)} - \frac{i}{1}[\varphi^{i-1}(x+h)]^{(n)}\varphi(x)\\&+ \frac{i(i-1)}{1.2}[\varphi^{i-2}(x+h)]^{(n)}\varphi^2(x) - \ldots.\end{aligned}$$

(*) M. Schlömilch, *Journal de Crelle*, t. XXX.

Or, en y faisant $h = 0$, elle se réduit à

$$[\varphi^i(x)]^{(n)} - \frac{i}{1}[\varphi^{i-1}(x)]^{(n)}\varphi(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}[\varphi^{i-2}(x)]^{(n)}\varphi^2(x) - \ldots,$$

de sorte qu'il vient, en remplaçant, pour abréger l'écriture, $\varphi(x)$ par u (*),

$$A_i = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[(u^i)^{(n)} - \frac{i}{1}(u^{i-1})^{(n)}u + \frac{i(i-1)}{1.2}(u^{i-2})^{(n)}u^2 - \ldots\right],$$

le dernier terme de la quantité entre parenthèses étant

$$(-1)^{i-1}i(u)^{(n)}u^{i-1}.$$

III. Les racines des équations algébriques ou transcendantes peuvent aussi être développées suivant les puissances croissantes de x par la formule de Maclaurin, puisqu'on sait former les dérivées des fonctions implicites, et, en prenant pour exemple la relation

$$y = a + x\sin y,$$

qui sera plus tard traitée dans le Calcul intégral, on trouvera sans peine pour les premiers termes

$$y = a + x\sin a + \frac{x^2}{2}\sin 2a + \frac{x^3}{8}(3\sin 3a - \sin a) + \ldots.$$

Mais sur ce sujet que je ne dois point aborder ici, je me bornerai à la remarque suivante du célèbre géomètre allemand Eisenstein. Supposons que le premier membre de l'équation $F(x, y) = 0$ soit un polynôme entier en x et y à coefficients numériques rationnels, et qu'on en ait tiré un développement en série

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

dont les coefficients α_0, α_1, ... soient de même rationnels. En les réduisant à leur plus simple expression, le dénomi-

(*) *Voyez* dans le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand, t. I, p. 139, une autre démonstration de ce résultat, qui n'est guère applicable qu'à la condition de pouvoir obtenir immédiatement les dérivées successives d'une puissance quelconque de u, c'est-à-dire dans les cas de $u = x^\mu$, $u = e^{ax}$.

nateur du terme général α_n présentera cette circonstance caractéristique, de ne jamais contenir qu'un nombre fini et limité de facteurs premiers différents.

Dans ce développement, par exemple,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n + \ldots,$$

on ramène la fraction

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$$

à n'avoir pour dénominateur qu'une puissance de 2, par cette transformation

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(2.4.6\ldots 2n)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2},$$

où l'on reconnaît dans le facteur $\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2}$ le coefficient du terme moyen dans le développement de la puissance $2n$ du binôme, qui est nécessairement un nombre entier. De cette observation découle comme conséquence immédiate que les séries

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

ne peuvent satisfaire à aucune équation algébrique, puisque les dénominateurs des coefficients contiennent des facteurs premiers en nombre illimité, et représentent nécessairement des fonctions transcendantes.

Je terminerai ces remarques par quelques exemples de développements en série de fonctions d'une ou de deux variables, savoir

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^m = (2x)^m - m(2x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2x)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2x)^{m-6} + \ldots \quad (*),$$

(*) LAGRANGE, *Leçons sur le Calcul des fonctions*, p. 126.

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = x\left[\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x^2-1)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{1}{(x^2-1)^3} - \ldots\right]$$

$$= x\sum\frac{2.4.6\ldots 2a}{3.5.7\ldots(2a+1)}\,\frac{(-1)^a}{(x^2-1)^{a+1}},$$

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}} = \sum\frac{1.3.5\ldots(2a-1).1.3.5\ldots(2b-1)}{2.4.6\ldots 2(a+b)}\,x^a y^b$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2.4}(3x^2 + xy + 3y^2) + \ldots.$$

$$\frac{1+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-y+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2^2}(2x^2+y^2) + \ldots$$

$$= \sum\frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{1.2\ldots b}\,\frac{x^{2b}y^{a-2b}}{2^a} + \ldots,$$

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y} = \sum\frac{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots b}{1.2.3\ldots(a+b+1)}\,x^a y^b$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2.3}(3x^2 + xy + 3y^2) + \ldots,$$

$$\frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\dfrac{1-x}{1-y}}}{\sqrt{(1-x)(x-y)}} = 1 + \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}y\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1.3}{2.4}y^2\right)$$

$$+ \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1.3}{2.4}xy^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^3\right) + \ldots,$$

$$\frac{\operatorname{arc\,cos}\left[\dfrac{(1-y)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{-\frac{1}{2}}}\right]}{\sqrt{y(1-x)(x-y)}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\left(x + \frac{2}{3}y\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{2.4}{3.5}y^2\right)$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(x^3 + \frac{2}{3}x^2y + \frac{2.4}{3.5}xy^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}y^3\right) + \ldots.$$

Enfin j'indiquerai, comme trouvant une application géométrique importante, ce résultat, que le groupe homogène des termes du second degré dans le développement du radical

$$\sqrt{1 + 2(\alpha x + \alpha' y) + (\beta x^2 + \beta' xy + \beta'' y^2)}$$
$$= 1 + (\alpha x + \alpha' y) + \tfrac{1}{2}[(\beta x^2 + \beta' xy + \beta'' y^2) - (\alpha x + \alpha' y)^2] + \ldots$$

entre comme facteur dans le groupe homogène du troisième degré et des degrés plus élevés.

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

Différentielle du premier ordre.

I. On a fait usage, en établissant les propriétés fondamentales des fonctions dérivées, de l'équation suivante

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

où ε désigne une quantité qui s'évanouit avec h. Cette équation, donnant

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{hf'(x)}=1+\frac{\varepsilon}{f'(x)},$$

montre que la limite du rapport de la différence $f(x+h)-f(x)$ au produit $hf'(x)$ est l'unité lorsque h tend vers zéro. C'est à ce produit qu'on a donné le nom de *différentielle* de $f(x)$, et on le désigne par la caractéristique d écrite devant la fonction, de sorte que l'on a

$$df(x)=hf'(x).$$

Dans le cas particulier de $f(x)=x$, cette équation devient

$$dx=h,$$

et la relation précédente s'écrit ainsi

$$df(x)=f'(x)\,dx.$$

La définition de la différentielle ainsi posée, voici la première proposition à établir. Soient

$$u=\varphi(x) \quad \text{et} \quad y=f(u),$$

je dis que la différentielle de y reste la même, soit qu'on exprime y en fonction de u par l'équation $y=f(u)$ ou en fonction de x par celle-ci $y=f[\varphi(x)]$.

En effet, la différentielle de y, en considérant y comme

fonction de x, est le produit de dx par la dérivée de y; on a donc, d'après la règle relative à la dérivée des fonctions de fonctions,

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx.$$

Or la différentielle de y, considérée comme fonction de u, est

$$dy = f'(u)du;$$

ce qui est précisément le résultat précédent, en observant que la différentielle du a pour valeur $\varphi'(x)dx$.

Soient, par exemple,

$$u = x^m \quad \text{et} \quad y = u^m,$$

au lieu des deux expressions établies en Algèbre

$$u' = mx^{m-1} \quad \text{et} \quad y' = mu^{m-1}u',$$

on aura ces résultats de même forme

$$du = mx^{m-1}dx \quad \text{et} \quad dy = mu^{m-1}du.$$

Nous avons maintenant à donner l'expression de la différentielle de toute fonction d'une variable, c'est-à-dire simplement à appliquer la notation différentielle aux expressions des dérivées des diverses fonctions considérées en Algèbre, et que nous allons ainsi passer en revue.

Soient, à cet effet, u, v, w,... diverses fonctions de x; les relations suivantes

$$y = u + v + w + \ldots, \quad y = uv, \quad y = \frac{u}{v},$$

donnent

$$y' = u' + v' + w' + \ldots, \quad y' = u'v + v'u, \quad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Multiplions donc les deux nombres par dx, et remplaçons $u'dx$, $v'dx$, $w'dx$,... par du, dv, dw,..., il viendra

$$dy = du + dv + dw + \ldots,$$
$$dy = v\,du + u\,dv,$$
$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

En opérant de même sur l'équation qui donne la dérivée

d'une fonction composée de plusieurs autres,

$$y = f(u, v, w, \ldots),$$

savoir

$$y' = f'_u u' + f'_v v' + f'_w w' + \ldots,$$

on trouvera

$$dy = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw + \ldots.$$

Et si à ces résultats on joint les suivants

$$dx^m = m x^{m-1} dx, \quad d \log x = \frac{1}{x} dx, \quad da^x = a^x \log a \, dx,$$

$$d \sin x = \cos x \, dx, \qquad d \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

$$d \cos x = - \sin x \, dx, \qquad d \operatorname{arc} \cos x = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \qquad d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{1}{1 + x^2} dx,$$

on aura réuni tout ce qui concerne la différentiation des fonctions explicites. Quant aux fonctions implicites données par une équation entre x et y, $f(x, y) = 0$, la valeur $y' = - \frac{f'_x}{f'_y}$ conduit à la relation

$$dy = - \frac{f'_x}{f'_y} dx.$$

II. L'introduction de la notion de différentielle nous ayant ainsi amené à présenter l'ensemble des résultats obtenus en Algèbre relativement à la formation des fonctions dérivées, je résumerai succinctement les procédés qui y conduisent. La dérivée de $y = f(u)$, en supposant $u = \varphi(x)$, savoir

$$y' = f'(u) \varphi'(x),$$

sera le premier point à établir, et on sait qu'on y parvient bien facilement. Le second point sera la dérivée de $\log x$, il exige plus de développement, mais on peut le considérer comme fondamental, car, en employant cette proposition évidente, que la dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de chacune d'elles, on en déduit immédiatement la dérivée d'un produit de deux ou d'un nombre

quelconque de facteurs, d'un quotient, d'une puissance, l'exposant étant quelconque, enfin de l'exponentielle. Soit, par exemple,

$$y = u^m,$$

on aura

$$\log y = m \log u,$$

puis

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u};$$

d'où

$$y' = m\frac{y}{u}u' = mu^{m-1}u'.$$

Soit encore

$$y = a^x,$$

on aura

$$x \log a = \log y,$$

et on en conclura

$$\log a = \frac{y'}{y};$$

doù

$$y' = y \log a = a^x \log a.$$

Viennent ensuite les fonctions circulaires, dont la dérivée se déduirait encore de l'exponentielle, en admettant les formules d'Euler

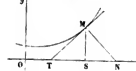
$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

mais qu'on établit directement d'une manière plus élémentaire. Obtenu par une voie ou par l'autre, le résultat conduit, en posant $\sin y = x$, $\cos y = x$, aux dérivées de $\arcsin x$, $\arccos x$, et il ne reste plus qu'à chercher celles des fonctions implicites. Ici se place un théorème important, donnant l'expression de la dérivée d'une fonction $f(u, v)$, composée de deux autres, et dont la démonstration est encore très-facile. Appliqué à l'équation $f(x, y) = 0$, il conduit immédiatement à l'expression cherchée, et qui complète l'ensemble des résultats précédemment énumérés, servant de base au Calcul différentiel.

III. Avant d'aller plus loin, je vais considérer, afin de familiariser avec la notation différentielle, quelques questions qui dépendent d'éléments géométriques relatifs à la tangente à une courbe $y = f(x)$.

En un point quelconque M (*fig.* 4), menons la tangente MT, la normale MN, l'ordonnée MS, et désignons par φ l'angle $\mathrm{MT}x$. On aura immédiatement

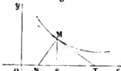
Fig. 4.



$$\mathrm{SN} = y\,\mathrm{tang}\,\varphi, \quad \mathrm{ST} = y\cot\varphi,$$
$$\mathrm{MN} = \frac{y}{\cos\varphi}, \quad \mathrm{MT} = \frac{y}{\sin\varphi};$$

ce sont les longueurs auxquelles on donne les noms de *sous-normale* et de *sous-tangente*, de *normale* et de *tangente*. Considérant en particulier les deux premières, je remarque que si l'angle φ est obtus, comme l'indique cette nouvelle figure (*fig.* 5), on aurait

Fig. 5.



$$\mathrm{SN} = -y\,\mathrm{tang}\,\varphi, \quad \mathrm{ST} = -y\cot\varphi.$$

Mais alors les longueurs ne sont plus comptées dans le même sens par rapport à la projection du point de contact sur l'axe Ox, de sorte qu'on peut se borner aux premières formules

$$\mathrm{SN} = y\,\mathrm{tang}\,\varphi, \quad \mathrm{ST} = y\cot\varphi,$$

en convenant, pour la sous-normale, qu'elle sera portée à droite du point S si elle est positive, à gauche si elle est négative, et faisant la convention inverse à l'égard de la sous-tangente. Cela posé, je me propose de déterminer toutes les courbes

$$\mathrm{Y} = f(x)$$

ayant, au signe près, même sous-normale et même sous-tangente qu'une courbe donnée quelconque $y = \varphi(x)$.

Employant à cet effet l'expression $\mathrm{tang}\,\varphi = \dfrac{dy}{dx}$, qui permet d'écrire

$$\mathrm{SN} = \frac{y\,dy}{dx}, \quad \mathrm{ST} = \frac{y\,dx}{dy},$$

je suis amené aux relations

$$\frac{\mathrm{Y}\,d\mathrm{Y}}{dx} = \pm\frac{y\,dy}{dx}, \quad \frac{\mathrm{Y}\,dx}{d\mathrm{Y}} = \pm\frac{y\,dx}{dy}.$$

Or la première, en multipliant les deux membres par $2\,dx$, donne immédiatement

$$2Y\,dY = \pm 2y\,dy,$$

ou bien

$$dY^2 = d(\pm y^2),$$

et en désignant par A une constante arbitraire, on en conclut

$$Y^2 = \pm y^2 + A.$$

A l'égard de la seconde, envisageant d'abord le signe +, on aura

$$\frac{Y\,dx}{dY} = \frac{y\,dx}{dy},$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dy}{y},$$

et on reconnaît ainsi dans les deux membres les différentielles de $\log Y$ et $\log y$, de sorte que nous en conclurons, en désignant par $\log A$ une constante arbitraire,

$$\log Y = \log y + \log A,$$

et enfin

$$Y = Ay.$$

Si l'on considère en second lieu le signe −, c'est-à-dire la relation

$$\frac{Y\,dx}{dY} = -\frac{y\,dx}{dy},$$

on en déduira

$$Y\,dy + y\,dY = 0,$$

et le premier membre mettant en évidence la différentielle du produit Yy, nous sommes amenés à cette conclusion

$$Yy = A,$$

d'où

$$Y = \frac{A}{y}.$$

On voit donc qu'étant donnée la tangente à la courbe

$y = \varphi(x)$, on en déduit, par une construction géométrique immédiate, la tangente à ces diverses transformées, savoir

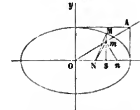
$$y^2 = \pm\varphi^2(x) + A, \quad y = A\varphi(x), \quad y = \frac{A}{\varphi(x)}.$$

Toutes les courbes du second degré, sous ce point de vue, dépendront de la ligne droite, qui est à elle-même sa propre tangente, et en considérant pour seul exemple l'ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

nous opérerons ainsi. Ayant tracé la droite $y = \frac{b}{a}x$ (*fig.* 6), qui est la diagonale OA du rectangle des axes, et mené l'ordonnée MS d'un point quelconque M de la courbe, nous obtiendrons sur cette diagonale le point m, auquel correspond la même sous-normale sauf le signe. Soit mn conduit perpendiculairement à Om, afin d'obtenir Sn; nous porterons cette distance à gauche du point S, en SN = Sn, et MN sera précisément la normale au point M de l'ellipse.

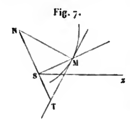
Fig. 6.



IV. Afin d'appliquer encore la notation différentielle, voici les questions analogues aux précédentes à l'égard des courbes rapportées à des coordonnées polaires, où l'on emploie encore ces mêmes dénominations de sous-normale, sous-tangente, etc., mais en les définissant d'une autre manière, comme il suit :

Élevons au pôle S (*fig.* 7) une perpendiculaire au rayon vecteur SM $= \rho$; soient T et N les points de rencontre pe cette perpendiculaire avec la tangente et la normale à la courbe en M ; on aura, si l'on désigne par V l'angle SMT :

Fig. 7.



La sous-normale .... $SN = \rho \cot V$,

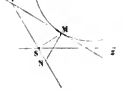
La sous-tangente .... $ST = \rho \operatorname{tang} V$,

La normale .... $MN = \frac{\rho}{\sin V}$,

La tangente .... $MT = \frac{\rho}{\cos V}$.

Ces diverses expressions, sauf celle de la normale MN, sont affectées du signe — dans le cas de l'angle V obtus, comme on le verrait par cette seconde figure (*fig.* 8). Mais, sans m'y arrêter, je remarque qu'en désignant par ρ' la dérivée de ρ par rapport à l'angle polaire ω, on a

Fig. 8.



$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho},$$

et on en conclut, en employant la notation différentielle,

$$SN = \frac{d\rho}{d\omega}, \quad ST = \frac{\rho^2 d\omega}{d\rho},$$

$$MN = \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{d\omega}, \quad MT = \frac{\rho\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{d\rho}.$$

Soit donc $\rho = f(\omega)$ l'équation d'une courbe quelconque, nous obtiendrons toutes les autres lignes $\rho_1 = \varphi(\omega)$, ayant même sous-normale, en posant

$$\frac{d\rho_1}{d\omega} = \frac{d\rho}{d\omega},$$

d'où

$$\rho_1 = \rho + A.$$

Cette seconde courbe a reçu le nom de *conchoïde de la première*. En égalant les sous-tangentes, nous trouverons

$$\rho_1^2 \frac{d\omega}{d\rho_1} = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho},$$

ou bien

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1^2} = \frac{d\rho}{\rho^2},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} + A,$$

ce qui établit entre les inverses des rayons vecteurs la même relation que précédemment.

Un résultat plus important s'obtient enfin en cherchant sous quelle condition les angles des tangentes avec les rayons vecteurs correspondant au même angle polaire ω sont supplémentaires. En posant, en conséquence,

$$\frac{\rho_1\, d\omega}{d\rho_1} = -\frac{\rho\, d\omega}{d\rho},$$

ce qui peut s'écrire

$$\rho_1\, d\rho + \rho\, d\rho_1 = 0,$$

on en conclut

$$\rho\rho_1 = A,$$

et l'on voit que la seconde courbe est la transformée de la première, par rayons vecteurs réciproques.

Différentielles d'un ordre quelconque.

I. En posant

$$y = f(x),$$

l'équation

$$dy = f'(x)\, dx$$

sert, comme on l'a vu, de définition à la différentielle première de y. Or cette différentielle, étant une fonction de x, a elle-même une différentielle qu'on désigne par $d(dy)$, ou plus simplement par d^2y, et dont l'expression, en supposant dx constant, s'obtient immédiatement au moyen de $f''(x)$. Effectivement, la différentielle de $f'(x)\,dx$ sera le produit de dx par sa dérivée relative à x, c'est-à-dire $f''(x)\,dx$, puisque dx est constant, de sorte que l'on aura

$$d^2y = f''(x)\, dx^2.$$

On obtiendra de même

$$d^3y = f'''(x)\, dx^3,$$

et généralement

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Il est à peine nécessaire d'observer que n indique dans $d^n y$ l'opération n fois répétée de la différentiation, tandis que dans dx^n, c'est un véritable exposant algébrique.

Cette notion de différentielles d'ordre quelconque étant en Analyse d'une grande importance, nous allons la présenter sous un nouveau point de vue.

II. A cet effet, je considère la suite des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ auxquelles je donne le nom de *différences successives de* $f(x)$, savoir

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x+h) - f(x),\\
f_2(x) &= f_1(x+h) - f_1(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_n(x) &= f_{n-1}(x+h) - f_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

et je vais prouver qu'on a

$$f_n(x) = h^n[f^{(n)}(x) + \varepsilon_n],$$

ε_n s'évanouissant avec h.

Pour cela, j'observerai d'abord qu'on obtient successivement

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\\
f_3(x) &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),
\end{aligned}$$

et généralement

$$f_n(x) = f(x+nh) - n_1 f[x+(n-1)h] + n_2 f[x+(n-2)h] - \ldots,$$

les quantités n_1, $n_2, \ldots$ désignant les coefficients des puissances de x, dans le développement de $(1+x)^n$. Cette formule importante se vérifie par le procédé élémentaire qui consiste à la supposer vraie pour un nombre quelconque n, et à démontrer qu'elle subsiste pour le nombre $n+1$. Cela posé, développons $f_n(x)$ suivant les puissances croissantes de h, en appliquant la série de Taylor à chacun des termes

qui entrent dans son expression, savoir

$$f(x+nh) = f(x) + \frac{nh}{1} f'(x) + \frac{n^2h^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

$$f[x+(n-1)h] = f(x) + \frac{(n-1)h}{1} f'(x) + \frac{(n-1)^2h^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

....,

Ces développements, substitués dans $f_n(x)$, donnent pour résultat

$$f_n(x) = N_0 f(x) + N_1 h f'(x) + N_2 h^2 f''(x) + \ldots,$$

les coefficients désignés par N_0, N_1, N_2,... dépendant uniquement du nombre n. En particulier, on trouvera

$$N_0 = 1 - n_1 + n_2 - \ldots = (1-1)^n = 0;$$

mais les suivants demandent, pour être déterminés, un procédé particulier, souvent employé dans d'importantes questions d'Analyse. Il consiste à mettre à profit cette circonstance, que les valeurs cherchées sont les mêmes pour toute fonction $f(x)$, et à faire la supposition de $f(x) = e^x$, d'où résultent les conséquences qu'on va voir. En premier lieu, on trouve

$$f_1(x) = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1),$$

$$f_2(x) = e^x(e^h - 1)^2,$$

..................,

$$f_n(x) = e^x(e^h - 1)^n.$$

Toutes les dérivées de $f(x)$ reproduisent d'ailleurs e^x, de sorte que la formule de développement de $f_n(x)$ donne immédiatement, en supprimant dans les deux membres le facteur e^x,

$$(e^h - 1)^n = N_0 + N_1 h + N_2 h^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right)^n = N_0 + N_1 h + N_2 h^2 + \ldots.$$

Or le premier membre contient en facteur h^n; donc, tous les nombres N_0, N_1, N_2, ..., jusqu'à N_{n-1}, sont nuls, et l'on a

$$N_n = 1, \quad N_{n+1} = \frac{n}{2}, \quad N_{n+2} = \frac{n(3n+1)}{24}, \quad N_{n+3} = \frac{n^2(n+1)}{48}, \ldots.$$

Nous obtenons donc, pour le développement cherché,

$$f_n(x) = h^n[f^{(n)}(x) + \varepsilon_n],$$

en posant

$$\varepsilon_n = \frac{nh}{2} f^{(n+1)}(x) + \frac{n(3n+1)h^2}{24} f^{(n+2)}(x) + \ldots,$$

quantité qui s'évanouit avec h. Il en résulte que la limite du rapport de la différence finie $f_n(x)$ au terme $h^n f^{(n)}(x)$ est l'unité, lorsque h tend vers zéro; or ce terme, en faisant $h = dx$, est précisément la différentielle d'ordre n de $f(x)$, à l'égard de laquelle on trouve, par cette nouvelle voie, la définition et la propriété caractéristiques données pour la différentielle du premier ordre. J'ai considéré, pour plus de simplicité, la série de Taylor comme indéfinie dans ce qui précède; mais si l'on veut raisonner plus rigoureusement, et envisager un nombre fini de termes, on observera qu'en arrêtant à la puissance h^{n+1} les développements de $f(x+nh)$, $f[x+(n-1)h]$, on obtient, au moyen de la première forme du reste,

$$f_n(x) = N_0 f(x) + N_1 h f'(x) + \ldots + N_n h^n f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}\mathfrak{R}}{1.2\ldots(n+1)},$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\mathfrak{R} = n^{n+1} f^{(n+1)}(x_n) - n_1(n-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x_{n-1})$$
$$+ n_2(n-2)^{n+1} f^{(n+1)}(x_{n-2}) - \ldots \pm n_1 f^{(n+1)}(x_1),$$

x_i désignant une valeur comprise entre les limites x et $x+ih$. Cela étant, la conclusion ressortira des propriétés purement numériques des coefficients $N_0, N_1, N_2, \ldots$ dont les $n-1$ premiers s'évanouissent, les suivants étant : $N_n = 1$, $N_{n+1} = \frac{n}{2}, \ldots$, propriétés qu'on peut supposer établies *à priori*. Nous trouvons ainsi non-seulement

$$f_n(x) = h^n[f^{(n)}(x) + \varepsilon_n],$$

mais encore ε_n sous la forme suivante

$$\varepsilon_n = \frac{h\mathfrak{R}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

III. La différentielle d'ordre n de la fonction Ae^{ax} donne lieu

à une remarque importante. Ce nombre n, qui, par son origine, est essentiellement entier et positif, figure, à titre d'exposant algébrique, dans le second membre de la relation

$$d^n A e^{ax} = A e^{ax} a^n dx^n,$$

où il peut dès lors recevoir une valeur quelconque. On est ainsi amené à définir la *différentielle à indice quelconque* de Ae^{ax} par l'expression $Ae^{ax}a^n dx^n$, obtenue d'abord en supposant n entier et positif. De cette fonction particulière, nous passerons ensuite à une fonction quelconque exprimée analytiquement par cette somme

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + \ldots,$$

composée d'un nombre fini ou infini de termes, en convenant de poser

$$d^n y = (Aa^n e^{ax} + Bb^n e^{bx} + Cc^n e^{cx} + \ldots) dx^n.$$

Cette idée des différentielles à indices quelconques, qui est due à Leibnitz, a été le sujet des travaux de l'un des plus grands géomètres de notre époque, M. Liouville. Je renverrai à ses Mémoires, qui ont été publiés dans le *Journal de l'École Polytechnique*, en me bornant à donner à cette occasion la formule suivante

$$d^n uv = v d^n u + n_1 dv d^{n-1} u + n_2 d^2 v d^{n-2} u + \ldots + u d^n v,$$

où les coefficients numériques $n_1, n_2, \ldots$ sont ceux des termes en $x, x^2 \ldots$ dans le développement de $(1+x)^n$. Dans le cas de n entier, le seul que nous ayons à considérer, elle se démontre en l'admettant pour une valeur donnée de n, et vérifiant ensuite par la différentiation qu'elle a lieu pour la valeur $n+1$. On peut encore écrire, avec des coefficients numériques indéterminés, $n_0, n_1, n_2, \ldots$,

$$d^n uv = n_0 v d^n u + n_1 dv d^{n-1} u + n_2 d^2 v d^{n-2} u + \ldots,$$

et, en posant $u = e^{ax}$, $v = e^{bx}$, on arrivera immédiatement à la conclusion précédente, car il vient ainsi, après avoir supprimé dans les deux membres le facteur $e^{(a+b)x}$,

$$(a+b)^n = n_0 a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots.$$

Différentielles partielles et différentielles totales.

I. Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ peut être différentiée m fois par rapport à x, et ensuite p fois par rapport à y; c'est au résultat de ces opérations qu'on donne le nom de *différentielle partielle*. D'après ce qui précède, la différentielle d'ordre m par rapport à x s'exprimera par le produit de la dérivée $m^{\text{ième}}$, $f_{x^m}^{(m)}(x, y)$, multipliée par dx^m, et si, en considérant x comme constant, on différentie l'expression

$$f_{x^m}^{(m)}(x, y)\, dx^m$$

p fois par rapport à y, le résultat sera

$$f_{x^m y^p}^{(m+p)}(x, y)\, dx^m dy^p.$$

On l'écrit plus simplement encore de cette manière

$$\frac{d^{m+p} z}{dx^m dy^p}\, dx^m dy^p,$$

car, en premier lieu, $\frac{d^m z}{dx^m}$ est la dérivée d'ordre m de z, par rapport à x, et l'on convient ensuite de poser

$$\frac{d^p}{dy^p}\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right) = \frac{d^{m+p} z}{dx^m dy^p}.$$

Comme on a déjà démontré qu'on peut, à l'égard des fonctions de deux variables, intervertir l'ordre des dérivations par rapport à l'une et à l'autre variable, il en résulte que

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^p z}{dy^p}\right) = \frac{d^p}{dy^p}\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right),$$

et c'est ce qui justifie la notation adoptée $\frac{d^{m+p} z}{dx^m dy^p}$, où la permutation des indices m et p n'apporte aucun changement.

Soit proposé, comme exemple, de déterminer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ d'une fonction de x et y

définie par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Nous différentierons d'abord cette équation par rapport à x, en appliquant la règle des fonctions composées, et il viendra, en faisant suivant l'usage $\frac{dz}{dx} = p$,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p = 0.$$

Pour avoir ensuite $\frac{dz}{dy}$ qu'on représente par q, nous différentierons de même par rapport à y, ce qui donnera

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} q = 0.$$

Si l'on désirait en outre les trois dérivées partielles du second ordre, à savoir

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

on opérerait ainsi.

Différentiant par rapport à x l'équation

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p = 0,$$

nous observerons que les quantités $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dz}$ contiennent x et z, et donneront chacune deux termes; nous appliquerons ensuite le théorème qui permet de remplacer $\frac{d^2F}{dz\,dx}$ par $\frac{d^2F}{dx\,dz}$, et enfin remarquant que $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r$, nous trouverons

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dz} p + \frac{d^2F}{dz^2} p^2 + \frac{dF}{dz} r = 0.$$

Pour avoir s, nous pouvons partir de la même relation différentiée par rapport à y, ou de celle-ci

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} q = 0,$$

différentiée par rapport à x, et il vient ainsi

$$\frac{d^2F}{dx\,dy}+\frac{d^2F}{dy\,dz}p+\frac{d^2F}{dx\,dz}q+\frac{d^2F}{dz^2}pq+\frac{dF}{dz}s=0.$$

Enfin t résultera de la dernière différentiée par rapport à y, ce qui donnera

$$\frac{d^2F}{dy^2}+2\frac{d^2F}{dy\,dz}q+\frac{d^2F}{dz^2}q^2+\frac{dF}{dz}t=0.$$

Connaissant donc p et q en fonction de x, y et z, on en déduira, par la substitution, les valeurs de r, s et t.

II. La différentielle totale d'une fonction de deux variables $z=f(x,y)$ est la somme des différentielles partielles par rapport à x et par rapport à y, c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

et on la désigne par dz, le symbole d'opération d ayant, comme on le voit, des significations bien différentes dans les deux cas.

La différentielle totale seconde d^2z sera de même la somme des différentielles totales des deux termes $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, et si l'on suppose dx et dy constants, cette somme sera

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}dx+\frac{d^2z}{dx\,dy}dy\right)dx+\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}dx+\frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

En général, on aura, pour la différentielle totale d'ordre n,

$$d^nz=\frac{d^nz}{dx^n}dx^n+n_1\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy$$
$$+n_2\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2+\ldots+\frac{d^nz}{dy^n}dy^n,$$

et je vais établir qu'en supposant cette formule vraie pour le nombre n, elle le sera encore pour le nombre $n+1$. Effecti-

vement, la différentielle totale d'un terme quelconque

$$\frac{d^n z}{dx^\alpha dy^\beta} dx^\alpha dy^\beta$$

sera

$$\frac{d^{n+1} z}{dx^{\alpha+1} dy^\beta} dx^{\alpha+1} dy^\beta + \frac{d^{n+1} z}{dx^\alpha dy^{\beta+1}} dx^\alpha dy^{\beta+1},$$

de sorte qu'on aura

$$d^{n+1} z = \frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} dx^{n+1} + (1 + n_1) \frac{d^{n+1} z}{dx^n dy} dx^n dy + (n_1 + n_2) \frac{d^{n+1} z}{dx^{n-1} dy^2} dx^{n-1} dy^2 + \ldots.$$

Or, on reconnaît, d'après une propriété élémentaire des coefficients du binôme, que ce résultat se déduit du précédent, en y changeant n en $n+1$.

Je me bornerai maintenant à énoncer, sans la démontrer, la proposition suivante, analogue à celle qui concerne les différentielles des fonctions d'une seule variable.

Soient

$$f_1(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y),$$
$$f_2(x, y) = f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_n(x, y) = f_{n-1}(x+h, y+k) - f_{n-1}(x, y).$$

Si l'on développe $f_n(x, y)$ par la formule de Taylor, suivant les puissances ascendantes de h et de k, sous cette forme

$$f_n(x, y) = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_i + \ldots,$$

où U_i désigne l'ensemble homogène des termes de degré i en h et k, on aura identiquement

$$U_i = 0 \quad \text{pour} \quad i < n,$$

et, si l'on fait

$$h = dx, \quad k = dy,$$

l'expression générale de U_i sera

$$N_i d^i f(x, y),$$

en désignant comme ci-dessus par N_i le coefficient de h^i dans le

développement de $\left(\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1.2}+\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\right)^i$. Le premier terme de la série qui représente $f_n(x, y)$ sera donc la différentielle totale $d^n z$.

Changement de la variable indépendante.

On a vu précédemment que l'étude des fonctions algébriques, et spécialement des racines carrées des polynômes entiers en x, reposait surtout sur l'emploi des substitutions rationnelles de la variable x en une autre θ. C'est ainsi, par exemple, qu'ont été ramenées aux fonctions rationnelles les expressions de la forme $f\left[x, \sqrt{A(x-a)(x-b)}\right]$. Or le même procédé analytique joue un rôle très-important dans l'étude des fonctions définies par une relation telle que

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right)=0,$$

ce qui est l'un des principaux objets du Calcul intégral. Ces relations ont reçu la dénomination d'*équations différentielles*, à cause de l'expression des dérivées de y, qui y figurent, par le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, \ldots$ L'Analyse envisage de même des conditions plus complexes, telles que

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^\alpha dy^\beta}, \ldots\right)=0,$$

où il s'agit d'une fonction z, de deux ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes, et qu'on nomme pour le même motif *équations aux différentielles partielles*. Les opérations relatives au changement de variables, dans ces diverses circonstances, constituent une question importante dont nous allons nous occuper dans les cas les plus simples.

I. Voici le premier : Supposons, comme on en a des exemples en Géométrie analytique, que les coordonnées x et y d'une courbe soient exprimées à l'aide d'une troisième

variable, qu'on ait par exemple

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

On ne pourra pas alors obtenir y en fonction de x, ni par conséquent le coefficient angulaire de la tangente dont la connaissance est nécessaire à la discussion de la courbe. Mais on peut chercher à l'exprimer en fonction de t, et on y parvient comme il suit.

A cet effet, soit en général

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

la première équation permettant d'exprimer t en x, on peut regarder y comme une fonction de fonction, ce qui donnera par conséquent

$$y' = \psi'(t) t'_x,$$

ou avec la notation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(t) \frac{dt}{dx}.$$

Cela posé, et en considérant toujours t comme fonction de x, on a

$$1 = \varphi'(t) \frac{dt}{dx};$$

nous obtiendrons donc le résultat cherché en éliminant $\frac{dt}{dx}$, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Par là, on voit que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe proposée s'exprime facilement, comme les coordonnées x et y, par le moyen de t; ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{1}{2} t.$$

J'ajoute qu'on obtiendra par le même procédé la dérivée d'un ordre quelconque de y par rapport à x. Qu'on suppose en effet

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Phi(t),$$

nous regarderons encore t comme une fonction de x déterminée par l'équation

$$x = \varphi(t),$$

et la règle de la dérivée des fonctions de fonctions donnant

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \Phi'(t)\frac{dt}{dx},$$

on en conclura

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{\Phi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

C'est ainsi qu'on obtient successivement ces valeurs

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\varphi'(t)[\varphi'(t)\psi'''(t) - \psi'(t)\varphi'''(t)] - 3\varphi''(t)[\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)]}{\varphi'^5(t)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

qu'on écrit de cette manière

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

les différentielles se rapportant dans les seconds membres à la variable t, qui reste quelconque. Pour en faire une application, je supposerai

$$y = t;$$

alors on aura les dérivées de y prises par rapport à x, exprimées par les dérivées de x prises par rapport à y sous cette forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\dfrac{dx}{dy}\dfrac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}.$$

II. Soit proposé, en second lieu, de changer de variable dans l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ay = 0,$$

en faisant $x = \sin t$, on aura ainsi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\cos t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dt}\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{\cos^2 t},$$

d'où ce résultat

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0.$$

Soit encore

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

Posons

$$x = e^t$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},$$

et l'on aura encore pour transformée

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0.$$

Je considère, en dernier lieu, l'équation différentielle suivante, qui est d'une grande importance en analyse, savoir

$$(x - x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Je fais

$$x = \sqrt{1-t^2},$$

ce qui donnera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1-t^2}{t^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{t^3},$$

de sorte qu'en substituant, on obtiendra, entre y et t, l'équation

$$(t - t^3)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{dy}{dt} - ty = 0,$$

qui reproduit la proposée entre y et x. On en conclut que $y = \varphi(x)$ étant une solution, on y satisfera encore en pre-

nant $y = \varphi(\sqrt{1-x^2})$. Cet exemple montre comment le procédé analytique du changement de variable dans une équation différentielle peut servir à l'étude des fonctions qu'elle définit.

III. Dans le second cas, nous considérerons une fonction de deux variables indépendantes $z = \varphi(x, y)$, et, en posant

$$x' = \alpha x + \beta y,$$
$$y' = \gamma x + \delta y,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes, nous déterminerons les dérivées partielles du premier et du second ordre de z par rapport à x et y, au moyen des dérivées partielles prises par rapport à x' et y'.

Concevons, à cet effet, qu'on ait remplacé dans la fonction proposée les variables x et y par leurs valeurs en x', y', et qu'on ait ainsi obtenu

$$z = \Phi(x', y').$$

Alors la règle relative à la dérivée d'une fonction composée de deux autres donnera immédiatement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\Phi}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{d\Phi}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

ou simplement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}\alpha + \frac{dz}{dy'}\gamma,$$

et l'on trouvera de même

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}\beta + \frac{dz}{dy'}\delta.$$

Pour obtenir ensuite les dérivées du second ordre, on observera que $\frac{dz}{dx'}$, par exemple, est une fonction de x' et y', dont les dérivées par rapport à x et à y seront respectivement

$$\frac{d^2z}{dx'^2}\frac{dx'}{dx} + \frac{d^2z}{dx'dy'}\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2z}{dx'^2}\alpha + \frac{d^2z}{dx'dy'}\gamma,$$
$$\frac{d^2z}{dx'^2}\frac{dx'}{dy} + \frac{d^2z}{dx'dy'}\frac{dy'}{dy} = \frac{d^2z}{dx'^2}\beta + \frac{d^2z}{dx'dy'}\delta.$$

En traitant de même $\frac{dz}{dy}$, on trouvera les expressions suivantes

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2z}{dx'dy'}\alpha\gamma + \frac{d^2z}{dy'^2}\gamma^2,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dx'^2}\alpha\beta + \frac{d^2z}{dx'dy'}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \frac{d^2z}{dy'^2}\gamma\delta,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}\beta^2 + 2\frac{d^2z}{dx'dy'}\beta\delta + \frac{d^2z}{dy'^2}\delta^2.$$

Soit, pour en donner une application, l'équation aux différences partielles à coefficients constants

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + 2b\frac{d^2z}{dx\,dy} + c\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

la transformée en x' et y' sera

$$A\frac{d^2z}{dx'^2} + 2B\frac{d^2z}{dx'dy'} + C\frac{d^2z}{dy'^2} = 0,$$

où l'on a fait

$$A = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2,$$

$$B = a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta,$$

$$C = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2.$$

En particulier, si l'on considère l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} - m^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

et qu'on pose

$$x' = mx + y,$$

$$y' = mx - y,$$

on obtiendra simplement $\frac{d^2z}{dx'dy'} = 0$, résultat dont il sera fait usage plus tard dans une circonstance importante.

Je terminerai ce sujet par un exemple de transformations non linéaires, en considérant l'équation suivante

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy^2\frac{dz}{dx} + 2(y - y^3)\frac{dz}{dy} + x^2y^2z = 0,$$

et prenant pour variables, au lieu de x et y, les quantités suivantes

$$x' = xy, \quad y' = \frac{1}{y}.$$

Dans ce cas, y' ne contient pas x, et il vient immédiatement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}y,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}y^2.$$

On trouve ensuite

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}x - \frac{dz}{dy'}\frac{1}{y^2},$$

et, par conséquent, en remplaçant x et y par leurs valeurs en x' et y',

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}\frac{1}{y'},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}\frac{1}{y'^2}.$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}x'y' - \frac{dz}{dy'}y'^2.$$

Cela fait, et en substituant, il arrive que, par rapport aux nouvelles variables, on retrouve exactement l'équation proposée, savoir

$$\frac{d^2z}{dx'^2} + 2x'y'^2\frac{dz}{dx'} + 2(y' - y'^3)\frac{dz}{dy'} + x'^n y'^2 z = 0.$$

Nous avons, par suite, ce résultat que, si l'on satisfait à l'équation proposée en prenant $z = f(x, y)$, une autre solution s'obtient en posant

$$z = f\left(xy, \frac{1}{y}\right).$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre, qui vient de nous donner un exemple du calcul du changement des variables, est, en Analyse, d'une grande importance. Elle donne en effet le développement en série d'une fonction uniforme analogue à l'exponentielle et aux lignes trigonométriques, servant de base à la théorie des fonctions elliptiques. Je

renverrai, pour les changements de variables dans les équations aux différences partielles de la théorie de la chaleur et de l'attraction, qui exigent des calculs plus longs, au *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand, t. I, p. 179, et au *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. I, p. 122.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Préliminaires.

Les questions de Géométrie dans lesquelles figure la considération des infiniment petits appartiennent essentiellement au Calcul infinitésimal. Elles s'offrent néanmoins dès les éléments, dans la mesure de la circonférence et du cercle, de la surface et du volume du cylindre, du cône et de la sphère, et, plus tard, en Géométrie analytique, pour la détermination de la tangente aux courbes données par leurs équations. On voit par là combien doivent être simples et élémentaires certains principes que nous attribuons cependant au Calcul différentiel et au Calcul intégral. Ils se résument effectivement dans la notion d'*infiniment petit*, qu'on sait déjà avoir pour définition une quantité variable dont la limite est zéro, et dans ces deux propositions :

1° *La limite du rapport de deux infiniment petits α et β n'est pas changée quand on les remplace par d'autres, α' et β', sous les conditions*

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1.$$

2° *La limite de la somme d'un nombre infiniment grand de quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*

La première se démontre en divisant membre à membre

les deux égalités posées, ce qui donne immédiatement

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pour établir la seconde, considérons une somme d'infiniment petits

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

dont le nombre n augmente indéfiniment, et nommons β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ d'autres infiniment petits, tels que

$$\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \quad \lim \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1, \ldots, \quad \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1.$$

On sait que le rapport

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

est compris entre la plus grande et la plus petite des fractions $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$; il a donc pour limite l'unité sous les conditions admises, et les deux sommes d'infiniment petits sont égales entre elles.

A ces propositions se joint une notion importante, celle des infiniment petits de divers ordres. Nous dirons qu'un infiniment petit β est du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à α, lorsque β est une fonction de α telle, que $\frac{\beta}{\alpha^n}$ soit fini pour $\alpha = 0$; ainsi, en supposant la première des constantes A, B, C,... différente de zéro, on pourra généralement poser

$$\beta = \alpha^n (A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots).$$

Tels sont ces principes de l'application du Calcul infinitésimal à la Géométrie, dont l'importance et l'étendue ne pourront être appréciées que plus tard. Mais, afin de les rendre plus clairs, je vais de suite donner plusieurs exemples de leur usage.

I. Soient M et N (*fig.* 9) deux points voisins d'une courbe $y = f(x)$ rapportée à des coordonnées rectangulaires, MA et NB leurs ordonnées. L'aire MNAB et le rectangle MN'AB,

obtenu en menant MN' parallèle à l'axe des abscisses, s'évanouissent en même temps quand M et N coïncident. Ce sont, par conséquent, des infiniment petits, et je vais prouver que la limite de leur rapport est l'unité.

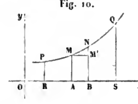
Fig. 9.

Supposons, à cet effet, les points M et N assez voisins pour que, dans leur intervalle, l'ordonnée de la courbe varie toujours dans le même sens et soit, pour fixer les idées, continuellement croissante. En menant NM' parallèle à l'axe, on formera un rectangle $M'NAB$, comprenant l'aire $MNBA$, qui est elle-même inférieure au rectangle $MN'AB$, où le côté MN' est parallèle à $M'N$. Or le rapport des deux rectangles, ayant une dimension commune AB, est celui des lignes $M'A$ et MA; il a donc pour limite l'unité, et il en est de même, par conséquent, de la limite du rapport de l'aire $MNAB$ à l'un d'entre eux.

II. Cet exemple de la substitution, sous la condition du premier principe, d'un infiniment petit à un autre, conduit immédiatement à une application du second principe concernant les limites de sommes.

Considérons, à cet effet, une portion, comprise entre deux ordonnées PR, QS (*fig.* 10), de l'aire de la courbe $y = f(x)$, et divisons-la, par des parallèles à l'axe des y, en n parties telles que $MNAB$, égales ou inégales, mais toutes infiniment petites quand n devient infiniment grand. Cela étant, et ayant mené MM' parallèle à l'axe des x, on voit, d'après ce qui a été établi sur le rapport des infiniment petits $MNAB$ et $MM'AB$, que la même aire sera aussi bien la limite de la somme des rectangles $MM'AB$. Ce résultat s'exprime sous forme analytique de la manière suivante :

Fig. 10.



Désignons par x_0, $x_1, \ldots, x_n$ les abscisses des points de division, de sorte que $x_0 = OR$, $x_n = OS$; la somme

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsqu'on fait décroître indéfiniment les différences $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$. Et si l'on écrit, comme on le fait souvent, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, cette limite, qui est la même quelle que soit la loi de décroissement de Δx_i, est précisément l'aire PQRS et s'exprime de cette manière

$$\text{PQRS} = \sum_0^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Renvoyant aux *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel, t. I, Chap. VIII, pour les exemples de résultats obtenus par cette formule avant l'invention du Calcul différentiel et du Calcul intégral, je me bornerai, d'après l'éminent géomètre, à observer que toutes les mesures de la Géométrie élémentaire sont des conséquences simples et immédiates de ce second principe sur les limites de sommes. Celle du cercle, par exemple, résulte d'une décomposition en secteurs égaux et de la substitution des triangles aux secteurs; celle de la pyramide triangulaire, d'une décomposition en troncs de pyramide de même hauteur, auxquels on substitue des prismes triangulaires, etc.

III. Voici maintenant des exemples d'infiniment petits du second ordre. L'un des plus simples et des plus importants s'offre en considérant, dans un triangle rectangle ABC, la différence entre l'hypoténuse AB (*fig.* 11) et sa projection AC, lorsqu'on suppose infiniment petit l'angle A que je désignerai par α. Ayant, en effet, $\text{AC} = \text{AB}\cos\alpha$, on en conclut

Fig. 11.

$$\text{AB} - \text{AC} = \text{AB}(1 - \cos\alpha) = \text{AB}\left(\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots\right),$$

fonction de α dont le développement commence au terme en α^2, de sorte que cette différence est un *infiniment petit du second ordre*.

Ce résultat, qu'il est si facile d'obtenir, est d'un emploi continuel, et, comme exemple, je vais en tirer la détermina-

tion de la tangente aux courbes définies par une équation en coordonnées polaires, déjà connue par les éléments.

Soient OM et OM′ (*fig.* 12) deux rayons vecteurs qui correspondent aux angles ω et $\omega + d\omega$, de sorte qu'on ait

Fig. 12.

$$\mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{OM}' = \rho + d\rho.$$

En projetant le point M sur OM′ en P, aux infiniment petits près du second ordre, OP sera égal à ρ, et par conséquent PM′ à $d\rho$. Le triangle rectangle M′MP donnera donc

$$\operatorname{tang} \mathrm{M}' = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P}} = \frac{\rho \sin d\omega}{d\rho} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho},$$

et en nommant V l'angle formé par le rayon vecteur avec la portion de la direction limite M′M, dirigée du côté vers lequel l'angle ω décroît, nous obtiendrons immédiatement

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \operatorname{tang} \mathrm{M}' = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}.$$

Considérons encore la distance à la tangente d'un point d'une courbe $y = f(x)$ infiniment voisin du point de contact dont les coordonnées seront supposées x et y. En désignant par X et Y les coordonnées courantes, la tangente aura pour équation

$$\mathrm{Y} - y = f'(x)(\mathrm{X} - x),$$

et la distance à cette droite du point $x' = x + h$, $y' = f(x + h)$ sera

$$\frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

ou bien, en développant $f(x + h)$ par la série de Taylor,

$$\frac{\dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \dfrac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}.$$

Cette distance est donc, par rapport à h, infiniment petite du second ordre; elle le serait du troisième en un point d'in-

flexion dont l'abscisse annule, comme on sait,

$$f''(x).$$

Je vais appliquer ce résultat à quelques déterminations de tangentes par des considérations géométriques simples, et qui offriront des exemples intéressants de l'emploi des infiniment petits (*). Je me fonderai sur le lemme suivant :

La limite de la direction déterminée par deux points infiniment voisins M et M' (*fig.* 13) n'est pas altérée si l'on substitue au point M' un autre point M'', tel que M'M'' soit infiniment petit par rapport à MM'.

Fig. 13.

Effectivement, le triangle MM'M'' donnant la relation

$$\frac{M'M''}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin M''},$$

le premier membre a zéro pour limite sous la condition admise; il en est donc de même de $\sin M$, par conséquent de l'angle M, d'où résulte bien que les directions MM'', MM' se confondent à la limite.

Nous appliquerons à deux questions le lemme qu'on vient d'établir :

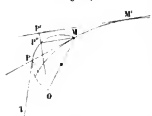
1° Trouver la tangente à la courbe lieu des projections d'un point fixe O, sur toutes les tangentes à une courbe donnée.

Traçons la tangente à cette courbe aux deux points infiniment voisins M et M' (*fig.* 14), et menons par le point M une parallèle à la tangente en M'. Soient P et P' les projections du point O sur les deux tangentes, et considérons en même temps le point P'' où la perpendiculaire OP' coupe la parallèle à la tangente en M'. La distance du point M à la tangente en M', que nous savons infiniment petite du second ordre, par rapport à MM', étant représentée par P'P'', nous substituerons

(*) Ces exemples sont tirés du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand, t. I, p. 10.

le point P″ à P′ de sorte que P et P″ appartenant au cercle décrit sur OM comme diamètre, la direction PP″ a pour limite la tangente à ce cercle. On a donc ainsi une construction facile de la tangente cherchée, et surtout de la normale qui s'obtiendra en joignant le point P au milieu de OM.

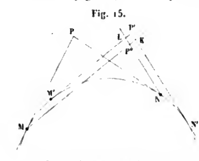
Fig. 14.



2° Trouver la tangente à la courbe lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe donnée.

Soient P (*fig.* 15) un des points du lieu, M et N les points de contact des deux tangentes qui le déterminent, P′ un second point infiniment voisin, M′ et N′ les points de contact qui y correspondent.

Fig. 15.



Menons par les points M et N des parallèles aux tangentes en M′ et N′, nous obtiendrons par les intersections de ces quatre droites un parallélogramme dont les côtés sont infiniment petits du second ordre, d'où l'on conclut que la distance P′P″ est infiniment petite du second ordre. Cherchant donc, au lieu de la direction PP′, la limite de la direction PP″, on voit que ces deux points appartiennent à un segment capable de l'angle donné décrit sur MN comme corde, et l'on en conclut que la tangente au point P à ce segment est la droite cherchée.

Il n'est pas besoin de faire remarquer l'élégance de ces résultats et la simplicité de la méthode géométrique qui les a donnés; j'observe toutefois qu'ils s'obtiennent par la voie du calcul d'une manière également facile (*), et, qu'à y regarder de près, la voie purement géométrique est moins rapide

(*) BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 79.

qu'elle ne le semble tout d'abord. A l'égard du premier problème, par exemple, on a admis implicitement que PP′ est infiniment petit du même ordre que MM′, et il y aurait en toute rigueur lieu de le démontrer, ce qu'on fait du reste aisément. En effet, il suit de la construction du point P que les coordonnées X et Y sont des fonctions entièrement déterminées de celles du point M, ou seulement de son abscisse. Soit donc

$$X = \varphi(x), \quad Y = \psi(x);$$

en changeant x en $x + h$, on passera à la fois de M à M′ et de P à P′, dont les coordonnées seront

$$X' = \varphi(x + h) \quad \text{et} \quad Y' = \psi(x + h),$$

et on en conclut que la distance PP′ est donnée par un développement commençant à la première puissance de h, exactement comme MM′. On a en effet

$$\begin{aligned} PP' &= \sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2} \\ &= \sqrt{[h\varphi'(x) + \tfrac{1}{2}h^2\varphi''(x) + \ldots]^2 + [h\psi'(x) + \tfrac{1}{2}h^2\psi''(x) + \ldots]^2} \\ &= h\sqrt{\varphi'^2(x) + \psi'^2(x) + h[\varphi'(x)\varphi''(x) + \psi'(x)\psi''(x)] + \ldots}. \end{aligned}$$

IV. Je terminerai ces préliminaires en remarquant qu'un exemple important d'un infiniment petit du troisième ordre est donné par la différence entre l'arc infiniment petit α, d'un cercle de rayon R, et sa corde $2R\sin\frac{\alpha}{2R}$, cette différence étant en effet

$$\alpha - 2R\sin\frac{\alpha}{2R} = \frac{\alpha^3}{24R^2} + \ldots.$$

J'observerai enfin qu'il revient au même de dire que deux infiniment petits α et β ont l'unité pour limite de leur rapport, ou un infiniment petit du second ordre pour différence. Si l'on a effet

$$\beta - \alpha = A\alpha^2 + \ldots,$$

on en tire

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + A\alpha + \ldots, \quad \text{et} \quad \lim\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

De même, en posant

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + A\alpha + \ldots,$$

on en conclut

$$\beta - \alpha = A\alpha^2 + \ldots.$$

Dérivée de l'aire d'une courbe plane.

Fig. 16.

L'espace compris entre les ordonnées PR, QS (*fig.* 16) et l'arc d'une courbe $y = f(x)$ est déterminé par les abscisses OR et OS; en supposant la première constante, l'aire dont il s'agit est une fonction de l'abscisse $OS = x$, et nous allons en chercher la dérivée.

Or on voit, par la figure, qu'il faut pour cela obtenir la limite du rapport de la surface QSQ'S' à SS', qui est l'accroissement infiniment petit de l'abscisse; mais ici l'élément infinitésimal peut être remplacé par le rectangle QSQ''S' comme on l'a établi précédemment, et le rapport cherché devient immédiatement l'ordonnée $QS = f(x)$ qui représente ainsi la dérivée de l'aire.

Considérons en second lieu, à l'égard d'une courbe en coordonnées polaires, le secteur OPQ, où OP (*fig.* 17) est supposé fixe, comme une fonction de l'angle $QOx = \omega$ qui détermine le rayon variable $OQ = \rho$; voici alors la substitution d'infiniment petits qui donne la dérivée. Décrivons du pôle comme centre avec OQ pour rayon un arc de cercle coupant OQ' en R, je dis que le rapport des surfaces infiniment petites OQQ' et OQR a pour limite l'unité. Considérant, en effet, les secteurs circulaires semblables O Q' R' et OQR, on aura à la fois

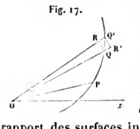


Fig. 17.

$$OQR < OQQ' < OQ'R',$$

ou bien

$$1 < \frac{OQQ'}{OQR} < \frac{OQ'R'}{OQR};$$

mais, d'après la relation

$$\frac{\text{OQ'R'}}{\text{OQR}} = \frac{\overline{\text{OQ'}}^2}{\overline{\text{OQ}}^2},$$

la limite de ce rapport étant l'unité, il en est de même de $\frac{\text{OQQ'}}{\text{OQR}}$. Remplaçant donc OQQ' par OQR dans l'expression du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de l'angle que je représenterai par $d\omega$, la dérivée cherchée sera

$$\frac{\frac{1}{2}\rho^2 d\omega}{d\omega} = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Les deux fonctions dont nous venons de déterminer successivement les dérivées étant désignées par U et S, on en conclut, pour leurs différentielles, les expressions suivantes

$$dU = y\,dx, \quad dS = \tfrac{1}{2}\rho^2 d\omega,$$

et si l'on veut obtenir dS en coordonnées rectangulaires, il suffit de tirer des relations $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, cette valeur

$$\tang\omega = \frac{y}{x},$$

qui donne par la différentiation

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

et l'on en conclut

$$\rho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx,$$

et, par suite,

$$dS = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx.$$

Notion de l'intégrale définie.

J'indiquerai immédiatement une conséquence importante de la relation qui vient d'être obtenue $dU = f(x)dx$. Cette relation prouve géométriquement l'existence d'une fonction dont la dérivée est la fonction quelconque $f(x)$, et, en raison de l'origine arbitraire du segment U, on voit qu'il y entre une constante arbitraire, conformément à cette proposition que deux fonctions ayant même dérivée ne diffèrent que par une

quantité constante. Enfin il y a plus, et de l'équation

$$PQRS = \Sigma f(x_i)\Delta x_i,$$

nous allons déduire une définition analytique de la fonction primitive de $f(x)$. Considérons, à cet effet, parmi les divers modes de décomposition du segment en éléments rectangulaires, et qui tous conduisent à la même limite, le plus simple, où l'on diviserait en n parties égales à dx la base du segment. Dans ce cas, les quantités infiniment petites Δx_i sont égales à dx, les abscisses des points de division sont $x_1 = x_0 + dx$, $x_2 = x_0 + 2dx, \ldots$, et la dernière, $x_n = x_0 + n\,dx$, représente x, de sorte que U devient la limite de la somme

$$\left\{f(x_0) + f(x_0 + dx) + f(x_0 + 2dx) + \ldots + f[x_0 + (n-1)dx]\right\}dx.$$

Telle est donc maintenant, au point de vue du calcul, la définition de toutes les fonctions ayant pour différentielle $f(x)dx$. C'est en raison de ce mode d'expression par la somme des valeurs de $f(x)dx$, que ces fonctions ont reçu le nom d'*intégrales*, et l'on introduit cette dénomination dans le calcul en employant la lettre $\int$ initiale du mot somme, de sorte qu'on pose

$$\int f(x)dx = \left\{f(x_0) + f(x_0 + dx) + \ldots + f[x_0 + (n-1)dx]\right\}dx,$$

et je rappelle que le nombre n, croissant indéfiniment, est lié à la variable x et à l'élément infiniment petit dx par la relation

$$x = x_0 + n\,dx.$$

Ajoutons enfin que, pour indiquer à la fois dans l'expression générale de l'intégrale de $f(x)dx$ la variable x et la valeur particulière x_0, à partir de laquelle on fait commencer la somme, on écrit ces quantités en indice, de cette manière $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$; on a donc ainsi

$$U = \int_{x_0}^{x} f(x)dx, \quad \text{et} \quad dU = f(x)dx.$$

De là résulte la notation d'une fonction de la variable x entiè-

rement déterminée, et dont la valeur pour $x = x_1$, par exemple, sera représentée par $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$. C'est alors ce qu'on nomme une *intégrale définie*, et il est évident, d'après ce qui précède, qu'on exprime par là l'aire du segment de la courbe $y = f(x)$ compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses $x = x_0$, $x = x_1$.

Dérivée d'un arc de courbe.

I. Considérons dans l'espace une courbe quelconque rapportée à trois axes rectangulaires, et ayant pour équations

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x).$$

La longueur s d'un arc compris entre deux points, dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 et x, y, z, sera définie comme la limite du périmètre d'un polygone inscrit lorsqu'on fera décroître indéfiniment chacun des côtés. Prenant à cet effet n points sur l'arc considéré à partir de l'origine (x_0, y_0, z_0), et désignant les coordonnées de l'un quelconque d'entre eux par x_i, y_i, z_i, de sorte que x_n, y_n, z_n représentent les coordonnées x, y, z de l'extrémité, on aura évidemment pour la longueur du périmètre du polygone inscrit

$$s = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2},$$

ou plus simplement

$$s = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2},$$

en posant

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad y_{i+1} - y_i = \Delta y_i, \quad z_{i+1} - z_i = \Delta z_i.$$

Or, il faut maintenant supposer n croissant infiniment et, par conséquent, faire tendre vers zéro les quantités Δx_i, Δy_i, Δz_i, ce qui va nous conduire à une nouvelle et intéressante

application des principes précédents sur les limites de sommes.

Je dis en premier lieu que la limite du rapport suivant

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}{\Delta x\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}}$$

est l'unité pour $\Delta x = 0$. C'est ce qu'on rend évident en le mettant sous la forme

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}},$$

car, ayant $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, les quantités $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ sont respectivement égales à $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ pour $\Delta x = 0$. En vertu du principe sur la substitution des infiniment petits dans les limites de sommes, et en posant pour un instant

$$f(x)=\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)},$$

la longueur du périmètre deviendra donc

$$s=\Sigma f(x_i)\Delta x_i.$$

Or on retrouve l'expression analytique considérée précédemment; il en résulte que, dans tous les modes d'inscription, les quantités Δx_i tendant vers zéro, la limite de la somme sera toujours la même, et aura pour valeur l'intégrale définie

$$s=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}\,dx.$$

Il en résulte ensuite que la différentielle ds a pour valeur

$$ds=\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}\,dx,$$

et on a enfin cette conclusion que, dans une courbe quelconque, la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est l'unité. Ce n'est effectivement que l'interprétation géométrique de la valeur obtenue pour ds, si l'on écrit

$$ds=\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}\,dx=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

car s étant une fonction déterminée de x, ds représente, aux infiniment petits près du deuxième ordre, l'accroissement de s, et $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ la distance rectiligne des deux extrémités de l'arc auxquelles correspondent les coordonnées x, y, z, et $x+dx, y+dy, z+dz$.

II. Le cas des courbes planes rapportées dans le plan des xy à des coordonnées rectangulaires, et qu'il est important de remarquer, est donné par ce qui précède, en supposant la fonction $\psi(x)$ nulle, quel que soit x. On a alors, pour la différentielle de l'arc de la courbe $y=\varphi(x)$,

$$ds=\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

et de là il est aisé de conclure, en posant

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,$$

l'expression relative aux coordonnées polaires

$$ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\omega^2}.$$

Effectivement, si l'on part de la relation

$$x+y\sqrt{-1}=\rho\left(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega\right)=\rho e^{\omega\sqrt{-1}},$$

on obtiendra en différentiant

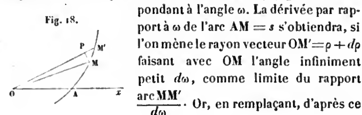
$$dx+dy\sqrt{-1}=e^{\omega\sqrt{-1}}d\rho+\sqrt{-1}\,\rho e^{\omega\sqrt{-1}}d\omega=e^{\omega\sqrt{-1}}\left(d\rho+\sqrt{-1}\,\rho\,d\omega\right),$$

et, par suite, en égalant les modules

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2 d\omega^2.$$

Ce résultat peut être directement établi comme il suit.

Supposons, pour plus de simplicité, un rayon vecteur fixe dirigé suivant l'axe polaire, et un autre $OM=\rho$ (*fig.* 18) correspondant à l'angle ω. La dérivée par rapport à ω de l'arc $AM=s$ s'obtiendra, si l'on mène le rayon vecteur $OM'=\rho+d\rho$ faisant avec OM l'angle infiniment petit $d\omega$, comme limite du rapport $\frac{\text{arc}\,MM'}{d\omega}$. Or, en remplaçant, d'après ce



qui a été tout à l'heure établi, l'arc MM' par sa corde, on transforme le rapport proposé en un autre dont l'évaluation est facile. Effectivement, en menant MP perpendiculaire sur OM', on aura, comme on l'a dit page 93, § III, aux infiniment petits près du second ordre, OP = OM, par conséquent PM' sera $d\rho$; d'ailleurs $\mathrm{MP} = \rho \sin d\omega = \rho\, d\omega$, par une nouvelle substitution d'infiniment petits, de sorte qu'ayant

$$\mathrm{MM'} = \sqrt{\overline{\mathrm{PM'}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2},$$

on en conclut

$$\frac{\mathrm{MM'}}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho^2}.$$

DU CONTACT GÉOMÉTRIQUE.

Les notions élémentaires de la tangente aux courbes et du plan tangent aux surfaces ont été l'origine d'une théorie dont le principe est dû à Lagrange, et où l'on envisage successivement le contact de deux courbes planes, de deux courbes dans l'espace, d'une courbe et d'une surface, et enfin de deux surfaces quelconques. Cette étude géométrique repose en entier sur la série de Taylor, dont on aura ainsi une application remarquable par sa généralité et son importance. Nous en exposerons l'idée essentielle en considérant d'abord le cas le plus simple, celui de deux courbes planes.

Contact des courbes planes.

I. Étant données deux courbes rapportées à des axes rectangulaires, nous concevrons que tous les points de l'une d'elles, ayant pour coordonnées X et Y, se déduisent, par une construction déterminée quelconque, des divers points de l'autre, dont nous désignerons les coordonnées par x et y. Cela posé, notre objet est d'étudier, à ce point de vue général, la distance de deux *points correspondants*, c'est-à-dire la quantité δ donnée par la formule

$$\delta^2 = (\mathrm{X} - x)^2 + (\mathrm{Y} - y)^2.$$

En premier lieu, je vais montrer que δ est fonction d'une seule variable. Soient en effet

$$y = \varphi(x), \quad Y = f(X)$$

les équations des deux courbes; dire que X et Y sont déterminés quand on donne x et y, c'est supposer entre ces quantités une relation telle que

$$F(x, y, X, Y) = 0,$$

d'où se déduira

$$F[x, \varphi(x), X, f(X)] = 0,$$

et par conséquent X en fonction de x, de sorte que δ s'exprime bien au moyen de la seule variable x.

On peut aussi, en se donnant les deux courbes par les relations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$
$$X = \Phi(T), \quad Y = \Psi(T),$$

conclure que T est fonction de t. Par conséquent, si l'on garde cette seule variable en écrivant

$$X = \Phi(t), \quad Y = \Psi(t),$$

la condition proposée qu'à tout point de la première courbe corresponde un point de la seconde, sera satisfaite d'elle-même. Ceci posé, je dirai qu'en un point déterminé par la valeur $t = a$, les courbes présentent un contact d'ordre n, lorsque la distance

$$\delta = [(X - x)^2 + (Y - y)^2]^{\frac{1}{2}} = \{[\Phi(t) - \varphi(t)]^2 + [\Psi(t) - \psi(t)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

deviendra pour $t = a + h$ un infiniment petit d'ordre $n + 1$ par rapport à h.

II. La première conséquence à tirer de cette définition, c'est cette remarque de Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, année 1826, p. 191) que les différences $X - x$ et $Y - y$ sont infiniment petites l'une et l'autre d'ordre $n + 1$. Soit en effet pour un instant

$$\Phi(a + h) - \varphi(a + h) = P + P'h + P''h^2 + \ldots + P^{(n)}h^n + \ldots,$$
$$\Psi(a + h) - \psi(a + h) = Q + Q'h + Q''h^2 + \ldots + Q^{(n)}h^n + \ldots,$$

la quantité

$$\delta = [(P + P'h + P''h^2 + \ldots)^2 + (Q + Q'h + Q''h^2 + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ne sera infiniment petite qu'en s'évanouissant pour $h = 0$, ce qui donne

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

On aura donc

$$\delta = h[(P' + P''h + \ldots)^2 + (Q' + Q''h + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}},$$

expression qui ne sera infiniment petite du second ordre qu'autant que le facteur compris entre parenthèses sera infiniment petit du premier, ce qui donne comme tout à l'heure

$$P'^2 + Q'^2 = 0, \quad \text{ou bien} \quad P' = 0, \quad Q' = 0.$$

Continuant ainsi de proche en proche, nous obtiendrons, pour le contact d'ordre n, les $2n + 2$ conditions

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0, \ldots, \quad P^{(n)} = 0,$$
$$Q = 0, \quad Q' = 0, \quad Q'' = 0, \ldots, \quad Q^{(n)} = 0,$$

exprimant en effet que les différences $X - x$, $Y - y$ sont infiniment petites d'ordre $n + 1$. Il s'ensuit que si l'on change d'axes coordonnés, ces mêmes conditions se reproduisent. Faisant en effet

$$x' = g + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = h + x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$X' = g + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad Y' = h + X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

on en conclura ces nouvelles expressions

$$X' - x' = (X - x)\cos\alpha - (Y - y)\sin\alpha,$$
$$Y' - y' = (X - x)\sin\alpha + (Y - y)\sin\alpha,$$

qui sont infiniment petites d'ordre $n + 1$ avec $X - x$ et $Y - y$.

III. Ce premier point établi, faisons un pas de plus et, au lieu de changer les axes coordonnés, remplaçons la variable t par une autre en posant

$$t = f(\theta),$$

de sorte que l'expression de δ, étant en premier lieu

$$\delta = F(t),$$

devienne

$$\delta = F[f(\theta)].$$

Admettant qu'on ait $\theta = \alpha$ pour $t = a$, je dis que si $F(a+h)$ est infiniment petit du $(n+1)^{ième}$ ordre par rapport à h, $F[f(\alpha+i)]$ sera un infiniment petit du même ordre par rapport à i. En effet, par hypothèse

$$F(a+h) = Ah^{n+1} + Bh^{n+2} + \ldots,$$

et la relation

$$a + h = f(\alpha + i)$$

donne, en développant le second membre,

$$h = \frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{i^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots;$$

ainsi l'on a

$$F[f(\alpha+i)] = A\left[\frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{i^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots\right]^{n+1} + B\left[\frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{i^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots\right]^{n+2} + \ldots\ldots,$$

ce qui est bien un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à i.

De cette remarque si facile à établir va résulter, par le choix convenable d'une nouvelle variable, une conclusion importante. Les équations des courbes étant

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$
$$X = \Phi(t), \quad Y = \Psi(t),$$

nous poserons

$$\varphi(t) = \theta, \quad \text{d'où} \quad \theta = x,$$

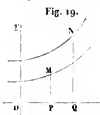
et on pourra les écrire de cette manière en prenant x pour variable

$$y = f(x),$$
$$X = \mathfrak{F}(x), \quad Y = F(x).$$

Or je dis que l'une des deux fonctions $\mathfrak{F}(x)$ et $F(x)$ détermine la construction des points correspondants, et l'autre, par conséquent, la nature de la seconde courbe.

Figurons-les en effet toutes deux, et soient $OP = x$, $MP = y$ (*fig.* 19) les coordonnées d'un point M de la première. L'abscisse $OQ = X$ par exemple, qui détermine le point N correspondant à M dans la seconde, s'obtiendra d'après la relation $X = \mathfrak{F}(x)$; d'où l'on voit que la fonction $\mathfrak{F}(x)$ a bien cette signification, de définir le mode de construction des points que nous avons nommés *correspondants*. Du nombre total des conditions obtenues pour le contact des deux courbes, la moitié se rapporte donc uniquement à ce mode de construction, ce sont celles qui expriment que, pour $x = a + h$, la différence

Fig. 19.



$$X - x = \mathfrak{F}(a + h) - (a + h)$$

est un infiniment petit d'ordre $n + 1$ par rapport à h. Les autres, exprimant que

$$Y - y = F(a + h) - f(a + h)$$

est un infiniment petit du même ordre, concernent essentiellement les deux courbes puisqu'elles ne changent point, comme on l'a vu, quand on change d'axes coordonnés. Elles donnent les équations suivantes

$$F(a) = f(a),$$
$$F'(a) = f'(a),$$
$$F''(a) = f''(a),$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

sous la condition que $F(a + h)$ et $f(a + h)$ puissent se développer par la série de Taylor, h étant infiniment petit. C'est ce qui aura lieu si les n premières dérivées des fonctions $F(x)$ et $f(x)$ sont toutes finies pour $x = a$.

IV. Revenons encore un instant, afin de l'éclaircir par des exemples, sur la considération des points correspondants. Si l'on pose simplement

$$X = \mathfrak{F}(x) = x,$$

la différence $X - x$ sera identiquement nulle, et les conditions du contact ne concernent que les courbes. Ces points se trouvent alors deux à deux sur les mêmes ordonnées, et c'est ainsi que Lagrange a traité du contact dans la *Théorie des fonctions analytiques*, 2e Partie, *Application de la théorie des fonctions à la Géométrie*. Nous pouvons encore, en envisageant les normales aux divers points de la courbe $y = f(x)$, définir comme correspondants les points où ces normales rencontrent l'autre ligne; la quantité δ sera alors un minimum, et l'on aura entre les coordonnées x et y d'une part, X et Y de l'autre, l'équation

$$(Y - y)f'(x) + X - x = 0.$$

Dans ce cas, la différence $X - x$ n'est plus identiquement nulle, mais on reconnaît qu'elle est nécessairement un infiniment petit du même ordre que $Y - y$, de sorte que les conditions du contact se réduisent comme précédemment à celles qui concernent les deux courbes, et toutes les relations de la forme

$$(Y - y)\varphi(x) + X - x = 0$$

conduiraient, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, à la même conclusion.

En général, et lorsqu'on ne spécifiera point la fonction $\mathfrak{F}(x)$ qui détermine la construction des points correspondants, nous la supposerons néanmoins remplir toujours cette condition, que $\mathfrak{F}(x) - x$ soit un infiniment petit d'ordre au moins égal à la différence des ordonnées $F(x) - f(x)$ pour $x = a + h$.

V. Nous allons passer maintenant aux applications, et nous nous proposerons de déterminer la droite et le cercle dont le contact avec la ligne donnée $y = f(x)$ soit de l'ordre le plus élevé possible. A l'égard de la droite

$$Y = aX + b,$$

on peut disposer de deux quantités a et b, et par conséquent obtenir, en un point quelconque $X = x$, un contact du premier ordre qui exige les deux conditions

$$F(x) = f(x), \quad F'(x) = f'(x).$$

Or ayant

$$F(x) = ax + b, \quad \text{d'où} \quad F'(x) = a,$$

elles donnent immédiatement

$$a = f'(x), \quad b = f(x) - xf'(x),$$

et l'on en conclut

$$Y = Xf'(x) + f(x) - xf'(x),$$

ce qui reproduit, si l'on remplace $f(x)$ par y et $f'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$, l'équation de la tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

A l'égard du cercle, on peut, avec les coordonnées du centre et le rayon, remplir les conditions

$$F(x) = f(x), \quad F'(x) = f'(x), \quad F''(x) = f''(x),$$

et obtenir un contact du second ordre. D'ailleurs, l'équation étant

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

on en conclut

$$F(x) = b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2},$$

$$F'(x) = \frac{a - x}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}}, \quad F''(x) = \frac{-R^2}{\sqrt{[R^2 - (x - a)^2]^3}},$$

d'où ces égalités

$$b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2} = f(x),$$

$$\frac{a - x}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}} = f'(x), \quad \frac{-R^2}{\sqrt{[R^2 - (x - a)^2]^3}} = f''(x),$$

qui donneraient sans difficulté a, b, R. Mais la considération suivante mène à un calcul plus simple. Traitant l'expression $Y = F(x)$ comme une fonction implicite définie par l'égalité

$$(x - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

j'observe que $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ s'obtiendront en la différentiant deux fois de suite, et que l'on aura ainsi

$$x - a + (Y - b)\frac{dY}{dx} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (Y - b)\frac{d^2Y}{dx^2} = 0.$$

Les conditions du contact seront donc exprimées en remplaçant dans ces relations Y, $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$, par $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ou bien y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce qui nous donne

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0,\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

d'où enfin

$$a=x-\frac{dy}{dx}\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad b=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ce cercle, dont l'étude se présentera bientôt à un autre point de vue dans la théorie de la *courbure*, a reçu le nom de *cercle osculateur de la ligne* $y=f(x)$. Et en général, toute courbe sera dite *osculatrice à la même ligne*, lorsque les diverses constantes qui déterminent sa nature et sa position par rapport aux axes coordonnés auront été calculées de manière à obtenir un contact de l'ordre le plus élevé possible. Une section conique, par exemple, contenant cinq coefficients, sera osculatrice lorsqu'elle aura un contact du quatrième ordre. Ici se place une remarque importante, c'est qu'on peut élever l'ordre d'une unité, en choisissant l'abscisse du point de contact. Par conséquent, sur une courbe donnée, $y=f(x)$, il existe en général un nombre fini et limité de points remarquables tels, qu'en ces points la tangente ait un contact du second ordre, le cercle osculateur du troisième, une section conique du cinquième, etc. La condition qui les détermine s'obtient comme il suit dans le cas de la droite et du cercle.

VI. A l'égard de la droite, elle est connue par les éléments, et l'on sait déjà qu'on en tire une notion géométrique importante, celle des *points d'inflexion*. Au point de vue de la théorie que nous exposons, elle s'obtient en joignant aux

deux équations

$$F(x) = f(x), \quad F'(x) = f'(x),$$

dans lesquelles

$$F(x) = ax + b,$$

celle-ci

$$F''(x) = f''(x),$$

qui se réduit immédiatement à $f''(x) = 0$.

Relativement au cercle, je reprends les équations

$$(x-a)^2 + (Y-b)^2 = R^2,$$

$$(x-a) + (Y-b)\frac{dY}{dx} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (Y-b)\frac{d^2Y}{dx^2} = 0,$$

dont la dernière, différentiée par rapport à x, fournira la troisième dérivée $\frac{d^3Y}{dx^3}$. Or, en la mettant d'abord sous la forme

$$\frac{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}{\frac{d^2Y}{dx^2}} + Y - b = 0,$$

la différentiation fera disparaître la constante b, et donne pour résultat

$$3\frac{dY}{dx}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3Y}{dx^3} = 0.$$

Si l'on remplace maintenant l'ordonnée Y du cercle par celle de la courbe proposée $y = f(x)$, on a immédiatement la condition cherchée

$$3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation propre à déterminer les valeurs de x pour lesquelles il y a égalité entre les ordonnées et les trois premières dérivées des ordonnées de la courbe et du cercle.

Soit, par exemple, l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, nous trouverons facilement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5},$$

et, par suite, l'égalité suivante

$$(a^2-b^2)(x^2-a^2).x = 0,$$

qui conduit aux sommets de la courbe, comme on pouvait le prévoir.

VII. Je terminerai l'exposé de cette théorie par la remarque suivante, qui est souvent utile. Lorsqu'une courbe est donnée par deux relations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

on peut directement calculer les coefficients de l'équation

$$F(X, Y) = 0,$$

de manière à obtenir, en un point quelconque $t = a$, un contact d'ordre n entre les deux lignes. Soit à cet effet

$$\mathfrak{F}(t) = F[\varphi(t), \psi(t)],$$

il suffira de poser $t = a$ dans ces équations

$$\mathfrak{F} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^n\mathfrak{F}}{dt^n} = 0,$$

que je vais tirer directement des principes mêmes de la théorie du contact. Reprenant les relations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$
$$X = \Phi(t), \quad Y = \Psi(t),$$

je rappelle que, pour $t = a + h$, les différences $X - x$ et $Y - y$ doivent être infiniment petites du $(n+1)^{ième}$ ordre par rapport à h, de sorte que l'on peut faire

$$X - x = \Phi(a+h) - \varphi(a+h) = \alpha h^{n+1} + \beta h^{n+2} + \ldots,$$
$$Y - y = \Psi(a+h) - \psi(a+h) = \alpha_1 h^{n+1} + \beta_1 h^{n+2} + \ldots.$$

Cela posé, soit

$$F(X, Y) = 0$$

l'équation qui résulte de l'élimination de t. Nous aurons identiquement

$$F(x, y) = F[X + (x - X), \; Y + (y - Y)],$$

et, en développant par la série de Taylor étendue à deux va-

riables,

$$F(x,y) = F(X,Y) + \frac{x-X}{1}\frac{dF}{dX} + \frac{(x-X)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dX^2}$$
$$+ \frac{y-Y}{1}\frac{dF}{dY} + \frac{(x-X)(y-Y)}{1}\frac{d^2F}{dX\,dY}$$
$$+ \frac{(y-Y)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dY^2} + \ldots.$$

Faisons maintenant

$$x = \varphi(a+h),\quad y = \psi(a+h),$$
$$X = \Phi(a+h),\quad Y = \Psi(a+h),$$

le premier membre devient ainsi $\mathfrak{F}(a+h)$; dans le second, le premier terme $F(X,Y)$ disparaît, l'expression $F[\Phi(t), \Psi(t)]$ étant identiquement nulle; on a d'ailleurs

$$X - x = \alpha h^{n+1} + \beta h^{n+2} + \ldots,$$
$$Y - y = \alpha_1 h^{n+1} + \beta_1 h^{n+2} + \ldots,$$

et il s'ensuit immédiatement qu'il est infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à h. Par conséquent, tous les coefficients des diverses puissances de h jusqu'à la $n^{ième}$ disparaissent dans le développement de $\mathfrak{F}(a+h)$, ce qui donne bien, pour $t=a$, les relations

$$\mathfrak{F} = 0,\quad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 0,\quad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = 0, \ldots,\quad \frac{d^n\mathfrak{F}}{dt^n} = 0,$$

qu'il fallait démontrer. Comme l'équation $\mathfrak{F}(t) = 0$ détermine les points communs aux deux courbes, on voit que la racine $t=a$ est multiple d'ordre $n+1$, lorsqu'elles ont en ce point un contact d'ordre n. Mais, sans m'arrêter à cette remarque, je vais appliquer ce qui précède au calcul des coordonnées du centre et du rayon du cercle osculateur $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$ à l'ellipse représentée par les équations

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t.$$

On a alors

$$\mathfrak{F}(t) = (a\cos t - \alpha)^2 + (b\sin t - \beta)^2 - R^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}'(t) = -a\sin t(a\cos t - \alpha) + b\cos t(b\sin t - \beta)$$
$$= -(a^2 - b^2)\sin t\cos t + a\alpha\sin t - b\beta\cos t,$$
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''(t) = -(a^2 - b^2)(\cos^2 t - \sin^2 t) + a\alpha\cos t + b\beta\sin t;$$

et les équations

$$\mathfrak{F}'(t) = 0, \quad \mathfrak{F}''(t) = 0,$$

ne renfermant que α et β, donnent facilement

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \beta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Nous en déduirons

$$R^2 = \left(a\cos t - \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t\right)^2 + \left(b\sin t - \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t\right)^2,$$

ce qu'on peut simplifier en observant que l'on a

$$a\cos t - \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t = \frac{\cos t}{a}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t),$$

$$b\sin t - \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t = \frac{\sin t}{b}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t),$$

de sorte qu'il vient en définitive

$$R^2 = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}{a^2 b^2}.$$

En considérant le cas général de la courbe

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

on trouverait

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}'(t) = \varphi'(t)(x - \alpha) + \psi'(t)(y - \beta),$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''(t) = \varphi''(t)(x - \alpha) + \psi''(t)(y - \beta) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t),$$

et, par conséquent, si l'on écrit simplement φ', φ'', ... au lieu de $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ...,

$$\alpha = \varphi + \frac{\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}, \quad \beta = \psi - \frac{\varphi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}, \quad R = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}.$$

Lorsque la variable indépendante est l'arc de courbe, ce qui donne la condition $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$, on a

$$R = \frac{1}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'},$$

8.

et les quantités α et β peuvent être mises sous cette forme

$$\alpha = \varphi + \psi'R, \quad \beta = \psi - \varphi'R.$$

qui est souvent employée.

Contact des courbes dans l'espace.

I. Deux lignes quelconques dans l'espace, et telles que tous les points de l'une se déduisent par une construction déterminée des points de l'autre, sont représentées par ces deux systèmes d'équations, savoir

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$
$$X = \Phi(t), \quad Y = \Psi(t), \quad Z = \Theta(t).$$

et la distance de deux points *correspondants* sera la fonction suivante de la variable t

$$\begin{aligned}\delta &= [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \{[\Phi(t) - \varphi(t)]^2 + [\Psi(t) - \psi(t)]^2 + [\Theta(t) - \theta(t)]\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ceci posé, nous dirons, comme précédemment, qu'au point donné par la valeur $t = a$, ces lignes présentent un contact du $n^{ième}$ ordre, lorsqu'en posant $t = a + h$, la distance δ est infiniment petite d'ordre $n + 1$ par rapport à h. De cette définition découlent les conséquences suivantes, déjà obtenues pour les courbes planes, et qui se démontreraient exactement de même :

1° Les trois différences

$$X - x, \quad Y - y, \quad Z - z$$

doivent être chacune infiniment petites de l'ordre $n + 1$.

2° Ces conditions restent les mêmes si l'on change les axes coordonnés.

3° Elles subsistent encore si l'on change de variable indépendante, en posant $t = f(\theta)$. Ainsi, en supposant qu'à la valeur $t = a$ réponde $\theta = \alpha$, et qu'on ait

$$a + h = f(\alpha + i),$$

si les quantités $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ et δ sont infiniment petites d'ordre $n+1$ par rapport à h pour $t=a+h$, elles sont infiniment petites du même ordre par rapport à i pour $\theta=\alpha+i$.

4° Prenant la coordonnée z pour variable indépendante, de sorte que les équations des deux courbes soient

$$x=f(z),\quad y=f_1(z),$$
$$X=F(z),\quad Y=F_1(z),\quad Z=\mathfrak{F}(z),$$

la fonction $\mathfrak{F}(z)$ pourra être choisie pour définir la loi de correspondance de leurs points, et les conditions de contact, en ce qui concerne les lignes elles-mêmes, se réduisent lorsqu'on suppose $\mathfrak{F}(z)=z$ à celles-ci

$$\begin{array}{ll} F(a)=f(a), & F_1(a)=f_1(a),\\ F'(a)=f'(a), & F'_1(a)=f'_1(a),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F^{(n)}(a)=f^{(n)}(a), & F_1^{(n)}(a)=f_1^{(n)}(a), \end{array}$$

et sont au nombre de $2n+2$.

Si ces principes de la théorie actuelle sont les mêmes que pour les courbes planes, les applications en sont moins étendues, et l'on ne considère que des lignes planes, la droite et le cercle dont nous allons nous occuper.

II. Les équations de la ligne droite

$$X=aZ+p,\quad Y=bZ+q$$

contenant quatre constantes, on peut en disposer de manière à établir en un point quelconque $Z=z$ un contact du premier ordre avec la courbe

$$x=f(z),\quad y=f_1(z),$$

ce qui exige les quatre conditions

$$F(z)=f(z),\quad F_1(z)=f_1(z),$$
$$F'(z)=f'(z),\quad F'_1(z)=f'_1(z).$$

Or, ayant $F(z)=az+p$, $F_1(z)=bz+q$, elles donnent

immédiatement

$$a = f'(z) = \frac{dx}{dz},$$

$$b = f_1'(z) = \frac{dy}{dz},$$

$$p = f(z) - zf'(z) = x - z\frac{dx}{dz},$$

$$q = f_1(z) - zf_1'(z) = y - z\frac{dy}{dz},$$

et nous en concluons les équations

$$X - x = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

qui sont celles de la tangente en un point quelconque de la courbe proposée. On en déduit, pour les cosinus des angles α, β, γ de sa direction avec les axes des x, des y et des z, ces formules

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}};$$

ou, en employant la différentielle de l'arc s de la courbe,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

III. On peut d'une manière élémentaire parvenir à ces résultats, en partant des équations d'une droite qui passe par deux points de la courbe.

Si l'on désigne, en effet, par x, y, z les coordonnées du premier point, par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ celles du second, ces équations sont

$$X - x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(Z - z), \quad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(Z - z),$$

et les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ ayant pour limites $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ lorsqu'on

rapproche indéfiniment les deux points, on retrouve sur-le-champ les équations de la tangente. Mais cette méthode plus élémentaire ne met point en évidence que la distance à la tangente d'un point de la courbe infiniment voisin du point de contact est infiniment petite du second ordre, ce qui résulte comme il suit de la méthode générale. Quelle que soit la dépendance entre les points des deux lignes, la distance δ d'un point de la courbe infiniment voisin du point de contact à son correspondant de la droite est, par définition même, un infiniment petit du second ordre; par conséquent, la plus courte distance est-elle, *à fortiori*, du même ordre. En voici d'ailleurs le calcul.

Désignons par

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t)$$

les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et par $x+h$, $y+k$, $z+l$ celles d'un point infiniment voisin qui correspond à la valeur $t+dt$ de la variable indépendante, de sorte que l'on ait en développant par la série de Taylor

$$h = \varphi(t+dt) - \varphi(t) = \varphi'(t)dt + \varphi''(t)\frac{dt^2}{2} + \ldots,$$

$$k = \psi(t+dt) - \psi(t) = \psi'(t)dt + \psi''(t)\frac{dt^2}{2} + \ldots,$$

$$l = \theta(t+dt) - \theta(t) = \theta'(t)dt + \theta''(t)\frac{dt^2}{2} + \ldots.$$

La distance de ce second point à la tangente, en écrivant ses équations sous la forme

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)} = \frac{Y-y}{\psi'(t)} = \frac{Z-z}{\theta'(t)},$$

est, d'après les formules connues,

$$\delta = \frac{[(k\theta' - l\psi')^2 + (l\varphi' - h\theta')^2 + (h\psi' - k\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

si l'on écrit, pour abréger, φ', ψ', θ' au lieu de $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\theta'(t)$. On en conclut immédiatement, au moyen des développements de h, k, l, que l'on a, aux infiniment petits près d'un

ordre supérieur au second,

$$\delta = \frac{[(\theta'\psi'' - \theta''\psi')^2 + (\varphi'\theta'' - \varphi''\theta')^2 + (\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dt^2}{2}.$$

Mais il convient de transformer cette expression, en mettant en évidence au lieu de dt l'élément de l'arc; employant à cet effet la relation

$$ds^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)\,dt^2,$$

nous obtenons la formule

$$\delta = \frac{[(\theta'\psi'' - \theta''\psi')^2 + (\varphi'\theta'' - \varphi''\theta')^2 + (\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds^2}{2},$$

dont nous allons donner la signification, en l'appliquant d'abord aux courbes planes. Il suffit à cet effet de supposer la fonction $z = \theta(t)$ identiquement nulle, et l'on obtiendra

$$\delta = \frac{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds^2}{2},$$

ou bien, en vertu de la formule établie page 115,

$$\delta = \frac{ds^2}{2R}.$$

R désignant le rayon du cercle osculateur à la courbe proposée : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, résultat important, que l'on peut aussi déduire de considérations géométriques.

IV. La seconde application de la théorie du contact des courbes dans l'espace a pour objet la détermination du cercle osculateur, ayant en un point d'une ligne quelconque un contact du second ordre. Six conditions sont alors à remplir, et l'on pourra en effet y satisfaire, un cercle étant déterminé dans l'espace par six quantités, dont trois se rapportent au plan qui le contient, deux autres à la position de son centre dans ce plan, et la dernière enfin à son rayon. En le représentant par les équations générales d'un plan et d'une sphère

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$
$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = \rho^2,$$

la première sera donc seule entièrement déterminée, et nous aurons ensuite à calculer les coordonnées du centre, α, β, γ, et le rayon R par les formules suivantes. Soit, pour un instant, δ la distance du centre de la sphère au plan, c'est-à-dire

$$\delta = \frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

on aura d'abord

$$R^2 = \rho^2 - \delta^2,$$

et l'on trouvera ensuite, par les formules de la Géométrie analytique, les relations

$$a - \alpha = \frac{A(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$b - \beta = \frac{B(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$c - \gamma = \frac{C(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

qui donnent α, β, γ. Mais les coordonnées X et Y étant actuellement des fonctions implicites de Z, il est d'abord nécessaire de présenter comme il suit les conditions générales du contact d'ordre n entre deux courbes

$$x = f(z), \quad y = f_1(z),$$
$$X = F(Z), \quad Y = F_1(Z),$$

au point $Z = z$.

Nous observerons à cet effet qu'en se donnant la seconde courbe par les relations

$$F(X, Y, Z) = 0, \quad F_1(X, Y, Z) = 0,$$

on formera, si l'on différentie chacune d'elles n fois de suite par rapport à Z, un système de $2n + 2$ relations entre cette variable et les quantités

$$X, \quad \frac{dX}{dZ}, \quad \frac{d^2X}{dZ^2}, \dots, \quad \frac{d^nX}{dZ^n},$$

$$Y, \quad \frac{dY}{dZ}, \quad \frac{d^2Y}{dZ^2}, \dots, \quad \frac{d^nY}{dZ^n},$$

de sorte qu'on obtiendra précisément les conditions voulues en faisant, dans ces équations, $Z = z$, puis

$$X = x, \qquad Y = y,$$
$$\frac{dX}{dZ} = \frac{dx}{dz}, \qquad \frac{dY}{dZ} = \frac{dy}{dz},$$
$$\frac{d^2X}{dZ^2} = \frac{d^2x}{dz^2}, \qquad \frac{d^2Y}{dZ^2} = \frac{d^2y}{dz^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^nX}{dZ^n} = \frac{d^nx}{dz^n}, \qquad \frac{d^nY}{dZ^n} = \frac{d^ny}{dz^n}.$$

Or, en posant pour un instant

$$\mathfrak{F}(z) = \mathrm{F}[f(z), f_1(z), z],$$
$$\mathfrak{F}_1(z) = \mathrm{F}_1[f(z), f_1(z), z],$$

cela revient à écrire

$$\mathfrak{F}(z) = 0, \quad \mathfrak{F}'(z) = 0, \quad \mathfrak{F}''(z) = 0, \ldots, \quad \mathfrak{F}^{(n)}(z) = 0,$$
$$\mathfrak{F}_1(z) = 0, \quad \mathfrak{F}'_1(z) = 0, \quad \mathfrak{F}''_1(z) = 0, \ldots, \quad \mathfrak{F}_1^{(n)}(z) = 0.$$

J'ajoute, qu'en considérant une variable quelconque à la place de la coordonnée z, de sorte que nous ayons

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

les conditions précédentes conserveront la même forme. On démontrerait, en effet, comme pour les courbes planes, qu'en faisant

$$\mathfrak{F}(t) = \mathrm{F}[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$
$$\mathfrak{F}_1(t) = \mathrm{F}_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$

elles deviennent

$$\mathfrak{F}(t) = 0, \quad \mathfrak{F}'(t) = 0, \ldots, \quad \mathfrak{F}^{(n)}(t) = 0,$$
$$\mathfrak{F}_1(t) = 0, \quad \mathfrak{F}'_1(t) = 0, \ldots, \quad \mathfrak{F}_1^{(n)}(t) = 0.$$

Soit donc, en écrivant, pour abréger, φ, ψ, θ au lieu de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$,

$$\mathfrak{F}(t) = \mathrm{A}\varphi + \mathrm{B}\psi + \mathrm{C}\theta + \mathrm{D},$$
$$\mathfrak{F}_1(t) = (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2 - \rho^2.$$

Nous poserons, en premier lieu,

$$\mathfrak{F}(t)=0,\quad \mathfrak{F}'(t)=0,\quad \mathfrak{F}''(t)=0,$$

c'est-à-dire

$$A\varphi+B\psi+C\theta+D=0,$$
$$A\varphi'+B\psi'+C\theta'=0,$$
$$A\varphi''+B\psi''+C\theta''=0.$$

On en conclura que le plan du cercle osculateur est donné par l'équation

$$(\theta'\psi''-\psi'\theta'')(X-\varphi)+(\varphi'\theta''-\theta'\varphi'')(Y-\psi)+(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')(Z-\theta)=0,$$

ou plus simplement

$$A(X-\varphi)+B(Y-\psi)+C(Z-\theta)=0,$$

en posant

$$A=\theta'\psi''-\psi'\theta''=\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$B=\varphi'\theta''-\theta'\varphi''=\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$C=\psi'\varphi''-\varphi'\psi''=\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

En second lieu, nous formerons les conditions

$$\mathfrak{F}_1(t)=0,\quad \mathfrak{F}'_1(t)=0,\quad \mathfrak{F}''_1(t)=0;$$

elles donnent les équations suivantes

$$(\varphi-a)^2+(\psi-b)^2+(\theta-c)^2=\rho^2,$$
$$(\varphi-a)\varphi'+(\psi-b)\psi'+(\theta-c)\theta'=0,$$
$$(\varphi-a)\varphi''+(\psi-b)\psi''+(\theta-c)\theta''=-(\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2),$$

dont les deux dernières contiennent linéairement $\varphi-a$, $\psi-b$, $\theta-c$, de sorte qu'en éliminant successivement une de ces trois quantités, on trouvera, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathcal{A}=B(\theta-c)-C(\psi-b),$$
$$\mathcal{B}=C(\varphi-a)-A(\theta-c),$$
$$\mathcal{C}=A(\psi-b)-B(\varphi-a),$$

ces valeurs, où s' est la dérivée par rapport à t de l'arc de

courbe,

$$\mathcal{A} = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)\varphi' = -s'^2\varphi',$$
$$\mathcal{B} = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)\psi' = -s'^2\psi',$$
$$\mathcal{C} = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)\theta' = -s'^2\theta'.$$

Or, de là peut se conclure le rayon R du cercle osculateur, en employant la relation déjà énoncée

$$R^2 = \rho^2 - \delta^2.$$

Nous avons, en effet,

$$\rho^2 = (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2,$$
$$\delta^2 = \frac{[A(\varphi - a) + B(\psi - b) + C(\theta - c)]^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

et, par conséquent,

$$R^2 = \frac{[(\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2](A^2 + B^2 + C^2) - [A(\varphi - a) + B(\psi - b) + C(\theta - c)]^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Mais, en décomposant le numérateur en trois carrés, et d'après les expressions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on voit immédiatement qu'on peut écrire

$$R^2 = \frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

d'où

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(\theta'\psi'' - \psi'\theta'')^2 + (\varphi'\theta'' - \theta'\varphi'')^2 + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')^2}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)^3}.$$

Nous retrouvons ainsi la quantité précédemment obtenue dans la recherche de la distance à la tangente d'un point d'une courbe infiniment voisin du point de contact, et l'on voit que l'expression de cette distance par la formule $\frac{ds^2}{2R}$ a la même signification géométrique que pour les courbes planes.

Déterminons maintenant les coordonnées α, β, γ, en employant les formules de la page 121, transformées comme on va voir. Considérant, par exemple, la première

$$a - \alpha = \frac{A(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

nous l'écrirons d'abord ainsi

$$a - \alpha = \frac{A[A(a - \varphi) + B(b - \psi) + C(c - \theta)]}{A^2 + B^2 + C^2},$$

d'où

$$\varphi - \alpha = \varphi - a + \frac{A[A(a-\varphi) + B(b-\psi) + C(c-\theta)]}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$= \frac{(\varphi - a)(A^2 + B^2 + C^2) + A[A(a-\varphi) + B(b-\psi) + C(c-\theta)]}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$= \frac{C[C(\varphi - a) - A(\theta - c)] - B[A(\psi - b) - B(\varphi - a)]}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Il s'ensuit que l'on a explicitement, au moyen de la variable t,

$$\varphi - \alpha = \frac{C\mathcal{B} - B\mathcal{C}}{A^2 + B^2 + C^2},$$

et de même

$$\psi - \beta = \frac{A\mathcal{C} - C\mathcal{A}}{A^2 + B^2 - C^2},$$

$$\theta - \gamma = \frac{B\mathcal{A} - A\mathcal{B}}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Une dernière simplification résulte enfin de ce qu'on peut faire

$$C\mathcal{B} - B\mathcal{C} = s'^2[(\varphi'\theta'' - \theta'\varphi'')\theta' - (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')\psi']$$

$$= s'^2[(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'')\varphi' - (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)\varphi'']$$

$$= s'^2(s's''\varphi' - s'^2\varphi'') = -s'^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'}{s'}\right),$$

et pareillement

$$A\mathcal{C} - C\mathcal{A} = -s'^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{s'}\right),$$

$$B\mathcal{A} - A\mathcal{B} = -s'^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta'}{s'}\right).$$

Nous en concluons en effet, en employant la formule

$$R^2 = \frac{s'^6}{A^2 + B^2 + C^2},$$

ces expressions définitives

$$\alpha = \varphi + \frac{R^2}{s'} \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'}{s'}\right),$$

$$\beta = \psi + \frac{R^2}{s'} \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{s'}\right),$$

$$\gamma = \theta + \frac{R^2}{s'} \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta'}{s'}\right) \text{ (*)}.$$

(*) On donne à la droite $\dfrac{X-\varphi}{\alpha-\varphi} = \dfrac{Y-\psi}{\beta-\psi} = \dfrac{Z-\theta}{\gamma-\theta}$ le nom de *normale prin-*

Elles se simplifient si l'on suppose que la variable indépendante soit l'arc de la courbe; on parvient alors, en effet, aux valeurs suivantes

$$\alpha = \varphi(s) + R^2\varphi''(s),$$
$$\beta = \psi(s) + R^2\psi''(s),$$
$$\gamma = \theta(s) + R^2\theta''(s),$$

qui définissent, dans l'espace, le lieu des centres des cercles osculateurs de la courbe proposée

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s).$$

Mais je ne m'occuperai pas ici de cette ligne, qui serait précisément la développée si la courbe était plane, j'indiquerai seulement pour l'élément de l'arc

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

cette formule très-simple, découverte par M. Molins,

$$d\sigma = ds\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2},$$

où figure une quantité r qu'on nomme le *rayon de torsion*, et qui nous occupera plus tard.

V. Après la ligne droite, intersection de deux plans, et le cercle, intersection du plan et de la sphère, la courbe qu'il

---

cipale à la courbe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \theta(t)$. Elle est en effet perpendiculaire à la tangente $\frac{X - \varphi}{\varphi'} = \frac{Y - \psi}{\psi'} = \frac{Z - \theta}{\theta'}$, la condition

$$(\alpha - \varphi)\varphi' + (\beta - \psi)\psi' + (\gamma - \theta)\theta' = 0$$

étant identique en vertu des valeurs de α, β, γ; car elle se réduit à celle-ci

$$\varphi'\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'}{s'}\right) + \psi'\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{s'}\right) + \theta'\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta'}{s'}\right) = 0,$$

qui devient simplement, en prenant l'arc pour variable indépendante,

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'' = 0.$$

Dans cette hypothèse, les cosinus des angles ξ, η, ζ de sa direction avec les axes seront

$$\cos\xi = R\varphi'', \quad \cos\eta = R\psi'', \quad \cos\zeta = R\theta''.$$

semblerait le plus naturel de considérer serait l'intersection de deux surfaces du second degré

$$F(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + \ldots = o,$$
$$F_1(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + \ldots = o.$$

Chacune de ces équations renfermant neuf coefficients arbitraires, au premier abord on pourrait croire possible, en supposant $Z = z$, de les déterminer par ces dix-huit conditions

$$X = f(z),\quad \frac{dX}{dz} = f'(z),\quad \frac{d^2X}{dz^2} = f''(z), \ldots,\quad \frac{d^8X}{dz^8} = f^{(8)}(z),$$
$$Y = f_1(z),\quad \frac{dY}{dz} = f'_1(z),\quad \frac{d^2Y}{dz^2} = f''_1(z), \ldots,\quad \frac{d^8Y}{dz^8} = f^{(8)}(z),$$

d'où résulterait avec la ligne proposée $x = f(z)$, $y = f_1(z)$ un contact du huitième ordre. Mais on peut atteindre seulement au septième, en raison des mêmes circonstances qui ne permettent point d'obtenir pour la ligne droite un contact du second ordre, bien qu'elle puisse être représentée par les équations

$$aX + bY + cZ + d = o,$$
$$AX + BY + CZ + D = o,$$

renfermant six coefficients indéterminés. Afin de bien éclaircir ce point, représentons encore la courbe par les relations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \theta(t)$, et en faisant comme plus haut

$$\mathcal{F} = F[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],\quad \mathcal{F}_1 = F_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$

posons les dix-huit conditions

$$\mathcal{F} = o,\quad \mathcal{F}' = o,\quad \mathcal{F}'' = o, \ldots,\quad \mathcal{F}^{(8)} = o,$$
$$\mathcal{F}_1 = o,\quad \mathcal{F}'_1 = o,\quad \mathcal{F}''_1 = o, \ldots,\quad \mathcal{F}^{(8)}_1 = o.$$

Je remarque que les neuf équations qui se rapportent à la fonction $\mathcal{F}(z)$ détermineront séparément les rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots,$ et que les neuf autres, ayant absolument les mêmes coefficients pour les inconnues, obligeront de prendre $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}, \frac{C}{A} = \frac{c}{a}, \ldots,$ ce qui fera coïncider les équations

$$F(X, Y, Z) = o,\quad F_1(X, Y, Z) = o.$$

En conséquence, nous poserons seulement seize conditions, savoir

$$\mathfrak{F} = 0,\quad \mathfrak{F}' = 0,\quad \mathfrak{F}'' = 0,\ldots,\quad \mathfrak{F}^{(7)} = 0,$$

$$\mathfrak{F}_1 = 0,\quad \mathfrak{F}'_1 = 0,\quad \mathfrak{F}''_1 = 0,\ldots,\quad \mathfrak{F}_1^{(7)} = 0.$$

Les premières donnant $a, b, c, \ldots$ en fonction linéaire homogène de deux indéterminées λ, μ, on en déduira cette expression

$$F(X, Y, Z) = \lambda\Phi + \mu\Psi,$$

où Φ et Ψ sont des polynômes entièrement déterminés. Le second groupe conduira pareillement à écrire, avec deux autres constantes arbitraires λ', μ',

$$F_1(X, Y, Z) = \lambda'\Phi + \mu'\Psi;$$

or le système des deux équations

$$\lambda\Phi + \mu\Psi = 0,\quad \lambda'\Phi + \mu'\Psi = 0$$

se réduit immédiatement à celui-ci

$$\Phi = 0,\quad \Psi = 0,$$

qui donne une courbe ayant un contact du septième ordre avec la proposée.

VI. Revenons encore aux équations de la tangente, pour considérer le cas où la courbe serait définie par deux relations entre les coordonnées

$$f(x, y, z) = 0,\quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Envisageant alors x et y comme des fonctions de la variable z, on obtiendra les dérivées $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ par les équations suivantes que donne la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{df}{dz} = 0,$$

$$\frac{df_1}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{df_1}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{df_1}{dz} = 0.$$

On en tire

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}},$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx}}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}},$$

ce qui donne, pour les équations cherchées,

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}}=\frac{Y-y}{\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx}}=\frac{Z-z}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}}.$$

Enfin, remarquons que le calcul précédent revient à éliminer les rapports $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ou plutôt les différentielles dx, dy, dz, entre les équations homogènes

$$\frac{dx}{X-x}=\frac{dy}{Y-y}=\frac{dz}{Z-z},$$

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

$$\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz=0,$$

de sorte qu'en tirant des premières équations ces différentielles pour les porter dans les deux autres, on sera amené à définir la tangente par ces deux nouvelles relations, savoir

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0,$$

$$(X-x)\frac{df_1}{dx}+(Y-y)\frac{df_1}{dy}+(Z-z)\frac{df_1}{dz}=0.$$

Elles mettent en évidence une conséquence importante; car le plan donné par la première, par exemple, restant le même quand on change la seconde équation de la courbe, doit contenir toutes les tangentes au même point (x, y, z) aux courbes d'intersection de la surface

$$f(x, y, z)=0,$$

par une autre surface absolument arbitraire

$$f_1(x, y, z) = 0:$$

c'est l'équation générale du plan tangent que nous retrouverons bientôt sous un autre point de vue et par une autre méthode.

Je terminerai ce qui concerne les tangentes aux courbes dans l'espace par la définition du *plan normal*. On nomme ainsi un plan perpendiculaire à la tangente et passant par le point de contact. Les formules de la Géométrie analytique donnent, d'après cela, pour son équation

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0,$$

et comme on a les relations

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz = 0,$$

ce plan est représenté par le déterminant à trois colonnes

$$\begin{vmatrix} X - x & \frac{df}{dx} & \frac{df_1}{dx} \\ Y - y & \frac{df}{dy} & \frac{df_1}{dy} \\ Z - z & \frac{df}{dz} & \frac{df_1}{dz} \end{vmatrix}$$

égalé à zéro.

Contact d'une courbe et d'une surface.

I. Cette théorie n'est qu'un corollaire de la précédente; elle s'en déduit par une considération extrêmement simple, amenée par la remarque suivante.

Soient dans l'espace deux courbes représentées par les équations

$$x = f(z), \quad y = f_1(z),$$
$$X = F(Z), \quad Y = F_1(Z),$$

les conditions pour qu'elles aient en un point $Z = z$ un con-

tact d'ordre n se sont offertes en premier sous cette forme

$$F(z)=f(z), \qquad F_1(z)=f_1(z),$$
$$F'(z)=f'(z), \qquad F'_1(z)=f'_1(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F^{(n)}(z)=f^{(n)}(z), \quad F_1^{(n)}(z)=f_1^{(n)}(z).$$

Il a été ensuite établi qu'en se donnant la seconde courbe par les équations

$$F(X, Y, Z)=0, \quad F_1(X, Y, Z)=0,$$

et faisant

$$\mathcal{F}(z)=F[f(z), f_1(z), z],$$
$$\mathcal{F}_1(z)=F_1[f(z), f_1(z), z],$$

on devait poser

$$\mathcal{F}(z)=0, \quad \mathcal{F}'(z)=0, \quad \mathcal{F}''(z)=0,\ldots, \quad \mathcal{F}^{(n)}(z)=0,$$
$$\mathcal{F}_1(z)=0, \quad \mathcal{F}'_1(z)=0, \quad \mathcal{F}''_1(z)=0,\ldots, \quad \mathcal{F}_1^{(n)}(z)=0.$$

Et si l'on considère enfin une variable quelconque à la place de la coordonnée z, de sorte que nous ayons

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\theta(t),$$

ces conditions gardent la même forme, car, en posant

$$\mathcal{F}(t)=F[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)], \quad \mathcal{F}_1(t)=F_1[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)],$$

elles deviennent

$$\mathcal{F}(t)=0, \quad \mathcal{F}'(t)=0,\ldots, \quad \mathcal{F}^{(n)}(t)=0,$$
$$\mathcal{F}_1(t)=0, \quad \mathcal{F}'_1(t)=0,\ldots, \quad \mathcal{F}_1^{(n)}(t)=0.$$

Ceci rappelé, imaginons qu'en conservant l'équation

$$F(X, Y, Z)=0,$$

on change l'autre

$$F_1(X, Y, Z)=0$$

d'une manière quelconque, mais en remplissant toujours les conditions de contact d'ordre n. Il est clair que nous pourrons envisager la première surface comme le lieu d'une infinité de courbes présentant au point $Z=z$ un contact d'ordre n avec la ligne proposée

$$x=f(z), \quad y=f_1(z).$$

De là se tire la notion géométrique à laquelle nous voulions parvenir; nous dirons, en effet, que l'équation

$$F(X, Y, Z) = 0$$

représente une surface ayant avec la courbe un contact de cet ordre, et nous ajouterons immédiatement à sa définition analytique la remarque suivante.

Considérant sur cette courbe un point infiniment voisin du point de contact et donné par la valeur $z + h$ de cette variable indépendante, on sait que sa distance au point correspondant de la ligne représentée par les équations

$$F(X, Y, Z) = 0,$$
$$F_1(X, Y, Z) = 0$$

est infiniment petite d'ordre $n + 1$ par rapport à h d'après sa définition; par conséquent, et *à fortiori*, la plus courte distance de ce point à la surface $F(X, Y, Z) = 0$ est-elle infiniment petite de cet ordre.

II. La théorie qui vient d'être exposée reçoit deux applications principales. La première concerne le plan dont l'équation renferme trois constantes, de sorte qu'on peut établir un contact du second ordre entre cette surface et une courbe quelconque

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t).$$

Or en posant

$$F(X, Y, Z) = AX + BY + CZ + D,$$

et

$$\mathfrak{F}(t) = A\varphi + B\psi + C\theta + D,$$

on est précisément amené à ces équations

$$\mathfrak{F}(t) = A\varphi + B\psi + C\theta + D = 0,$$
$$\mathfrak{F}'(t) = A\varphi' + B\psi' + C\theta' = 0,$$
$$\mathfrak{F}''(t) = A\varphi'' + B\psi'' + C\theta'' = 0,$$

et aux valeurs

$$A = \theta'\psi'' - \psi'\theta'', \quad B = \varphi'\theta'' - \theta'\varphi'', \quad C = \psi'\varphi'' - \varphi'\psi'',$$

obtenues dans la détermination du plan du cercle osculateur

(p. 123). Sous ce nouveau point de vue, et en entrant ainsi dans la théorie actuelle, ce plan a été nommé *osculateur*, l'ordre du contact étant aussi élevé qu'il est possible, d'après le nombre des coefficients qui entrent dans l'équation générale.

Il s'augmentera toutefois d'une unité, si l'on a

$$\mathfrak{F}'''(t) = A\varphi''' + B\psi''' + C\theta''' = 0,$$

et pour que cette nouvelle condition s'accorde avec les précédentes, il faudra que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \\ \theta' & \theta'' & \theta''' \end{vmatrix}$$

soit nul. L'équation $\Delta = 0$ permet donc d'obtenir sur la courbe un nombre fini et limité de points, pour lesquels le plan osculateur a un contact du troisième ordre. Il reçoit alors la dénomination particulière de *stationnaire*, qui lui a été donnée par M. Cayley. En posant enfin $\Delta = 0$, quel que soit t, on a la condition pour que tous les points de la courbe soient dans un seul et même plan.

Supposons en effet, pour plus de simplicité, $\theta(t) = t$, de sorte que, z devenant la variable indépendante, les équations de la courbe soient

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z).$$

Nous trouverons alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'',$$

et la condition $\Delta = 0$, en divisant par ψ''^2, prend cette forme

$$\left(\frac{\varphi''}{\psi''}\right)' = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\varphi'' = a\psi'',$$

a désignant une constante arbitraire. Il en résulte ensuite bien aisément

$$\varphi' = a\psi' + b,$$

puis enfin

$$\varphi = a\psi + bz + c,$$

c'est-à-dire

$$x = ay + bz + c,$$

de sorte que la courbe proposée est effectivement tout entière dans un même plan.

III. La seconde application concerne la *sphère osculatrice*

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2,$$

dont le contact sera généralement du quatrième ordre. Pour obtenir avec plus de simplicité l'expression des coordonnées du centre et du rayon, nous supposerons que la variable indépendante soit l'arc s de la courbe, de sorte qu'en écrivant

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s),$$

on ait la relation

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + \theta'^2(s) = 1.$$

Cela posé, soit encore

$$\mathfrak{F}(s) = [\varphi(s) - a]^2 + [\psi(s) - b]^2 + [\theta(s) - c]^2 - R^2,$$

ou, plus simplement,

$$\mathfrak{F}(s) = (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2 - R^2,$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}'(s) = (\varphi - a)\varphi' + (\psi - b)\psi' + (\theta - c)\theta',$$
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''(s) = (\varphi - a)\varphi'' + (\psi - b)\psi'' + (\theta - c)\theta'' + \varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2,$$

et, d'après la supposition faite sur le choix de la variable indépendante,

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''(s) = (\varphi - a)\varphi'' + (\psi - b)\psi'' + (\theta - c)\theta'' + 1.$$

Il en résulte pour la dérivée suivante, en remarquant que la condition admise

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 = 1$$

donne par la différentiation

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'' = 0,$$

cette valeur

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}'''(s) = (\varphi - a)\varphi''' + (\psi - b)\psi''' + (\theta - c)\theta'''.$$

Or des équations

$$(\varphi - a)\varphi' + (\psi - b)\psi' + (\theta - c)\theta' = 0,$$
$$(\varphi - a)\varphi'' + (\psi - b)\psi'' + (\theta - c)\theta'' = -1,$$
$$(\varphi - a)\varphi''' + (\psi - b)\psi''' + (\theta - c)\theta''' = 0$$

on tirera, en employant le déterminant Δ considéré plus haut,

$$(\varphi - a)\Delta = \theta'\psi''' - \psi'\theta''',$$
$$(\psi - b)\Delta = \varphi'\theta''' - \theta'\varphi''',$$
$$(\theta - c)\Delta = \psi'\varphi''' - \varphi'\psi''',$$

ce qui détermine les coordonnées du centre a, b, c, que l'on peut encore écrire, au moyen des coefficients du plan osculateur, sous cette forme

$$a = \varphi - \frac{1}{\Delta}\frac{dA}{ds}, \quad b = \psi - \frac{1}{\Delta}\frac{dB}{ds}, \quad c = \theta - \frac{1}{\Delta}\frac{dC}{ds}.$$

Nous obtiendrons ensuite le rayon par l'égalité

$$\mathcal{F}(s) = (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2 - R^2 = 0;$$

car ayant ainsi

$$R^2 = (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2,$$

il viendra immédiatement

$$R^2\Delta^2 = (\theta'\psi''' - \psi'\theta''')^2 + (\varphi'\theta''' - \theta'\varphi''')^2 + (\psi'\varphi''' - \varphi'\psi''')^2,$$

ou encore, d'après une identité bien connue,

$$R^2\Delta^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)(\varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2) - (\varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''')^2.$$

Nous ferons bientôt usage de ce résultat dans la théorie de la courbure.

IV. Je terminerai la théorie du contact d'une courbe et d'une surface, en faisant une application de cette notion géométrique nouvelle du plan osculateur. Considérant une courbe donnée par les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

je me propose, en plaçant l'origine des coordonnées en un point quelconque correspondant à la valeur $t = a$, de la rap-

porter au plan osculateur en ce point, comme nouveau plan des XY, puis à la tangente et à la normale pour axes des X et des Y. Mettons à cet effet $a+t$ au lieu de t, de sorte qu'on ait, par la série de Taylor,

$$x = \varphi(a+t) = \varphi(a) + \frac{t}{1}\varphi'(a) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots,$$

$$y = \psi(a+t) = \psi(a) + \frac{t}{1}\psi'(a) + \frac{t^2}{1.2}\psi''(a) + \ldots,$$

$$z = \theta(a+t) = \theta(a) + \frac{t}{1}\theta'(a) + \frac{t^2}{1.2}\theta''(a) + \ldots;$$

le déplacement d'origine s'effectuera d'abord en posant

$$x = \varphi(a) + x_1, \quad y = \psi(a) + y_1, \quad z = \theta(a) + z_1.$$

Cela fait, j'emploierai les trois transformations successives que voici, d'axes rectangulaires en d'autres axes rectangulaires situés dans le même plan :

1° Dans le plan des $y_1 z_1$, en faisant

$$y_2 = y_1\cos\lambda - z_1\sin\lambda,$$
$$z_2 = y_1\sin\lambda + z_1\cos\lambda,$$

et disposant de l'angle λ de manière à faire disparaître le coefficient de t dans l'expression de z_2;

2° En faisant, dans le plan des $x_1 y_2$,

$$x_3 = x_1\cos\mu - y_2\sin\mu,$$
$$y_3 = x_1\sin\mu + y_2\cos\mu,$$

et disposant de μ de manière à faire encore disparaître le terme en t dans y_3;

3° En faisant enfin, dans le plan des $x_3 z_2$,

$$x_4 = y_3\cos\nu - z_2\sin\nu,$$
$$z_4 = y_3\sin\nu + z_2\cos\nu,$$

et déterminant l'angle ν de sorte que z_4, déjà privé du terme du premier degré en t, perde le suivant en t^2.

Cela fait, si l'on désigne, pour plus de simplicité, par X, Y, Z les nouvelles coordonnées x_4, y_3 et z_4, leurs expressions, développées suivant les puissances de t, auront évidemment

cette forme

$$X = At + A't^2 + A''t^3 + \ldots,$$
$$Y = Bt^2 + B't^3 + \ldots,$$
$$Z = Ct^3 + \ldots.$$

Par conséquent, à une distance infiniment petite de l'origine correspondant à une valeur infiniment petite du premier ordre de t ou X, on voit que Y sera du second ordre et Z du troisième; donc l'axe des X est bien une tangente, et le plan des XY le plan osculateur.

Si l'on suppose de plus, comme il y a lieu de le faire dans plusieurs circonstances importantes, que t soit l'arc de la courbe compté à partir de l'origine, et qu'on fasse, comme précédemment, $t = s$, on aura

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 = 1,$$

ou bien

$$(A + 2A's + 3A''s^2 + \ldots)^2 + (2Bs + 3B's^2 + \ldots)^2 + (3Cs^2 + \ldots)^2 = 1,$$

et l'on en conclut

$$A^2 = 1, \quad A' = 0, \quad 4A'^2 + 6AA'' + 4B^2 = 0, \ldots;$$

par conséquent, $A = 1$, car on peut changer X en $-X$, $A' = 0$, $A'' = -\frac{2}{3}B^2$, résultats que nous emploierons bientôt.

Soit, comme exemple, l'hélice qui a pour équations

$$x = a \sin\frac{ls}{a}, \quad y = a \cos\frac{ls}{a}, \quad z = s\sqrt{1 - l^2},$$

la variable s étant bien l'arc de la courbe, car on a identiquement

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

En faisant $y = a + Y$, et développant en série, nous aurons

$$x = ls - \frac{l^3 s^3}{6a^2} + \ldots,$$
$$Y = -\frac{l^2 s^2}{2a} + \frac{l^4 s^4}{24a^3} - \ldots,$$
$$z = \sqrt{1 - l^2}\, s,$$

de sorte qu'une seule transformation d'axes conduira au résultat. Soit $l = \sin\lambda$, nous poserons

$$\begin{aligned} X &= x\sin\lambda + z\cos\lambda, \\ Z &= x\cos\lambda - z\sin\lambda, \end{aligned}$$

ce qui donnera en effet

$$\begin{aligned} X &= s - \frac{\sin^4\lambda}{6a^2}s^3 + \ldots, \\ Y &= -\frac{\sin^2\lambda}{2a}s^2 + \frac{\sin^4\lambda}{24a^3}s^4 - \ldots, \\ Z &= -\frac{\cos\lambda\sin^3\lambda}{6a^2}s^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Ces expressions, rapprochées de celles qui viennent d'être données pour une courbe quelconque, savoir

$$\begin{aligned} x &= s - \tfrac{2}{3}B^2s^3 + \ldots, \\ y &= Bs^2 + B's^3 + \ldots, \\ z &= Cs^3 + \ldots, \end{aligned}$$

montrent qu'en posant

$$B = -\frac{\sin^2\lambda}{2a},$$

l'hélice aura à l'origine un contact du second ordre avec la courbe. Et si le coefficient B' s'évanouit, ce qui généralement aura lieu en un nombre fini et limité de points d'une ligne donnée, on pourra, pour chacun de ces points, obtenir une hélice osculatrice ayant avec la courbe un contact du troisième ordre. En effet, si l'on détermine a et λ par les conditions

$$B = -\frac{\sin^2\lambda}{2a}, \quad C = -\frac{\cos\lambda\sin^3\lambda}{6a^2},$$

les développements en série des trois différences $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, suivant les puissances croissantes de la variable s, commenceront seulement aux termes du quatrième degré. Or on a vu que ce sont là précisément les conditions du contact du troisième ordre à l'égard de deux lignes dans l'espace.

Contact des surfaces.

I. Une surface étant définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$, les coordonnées d'un quelconque de ses points seront des fonctions de deux variables différentes, et devront s'exprimer de cette manière

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \psi(t, u), \quad z = \theta(t, u).$$

Et si nous considérons une seconde surface dont tous les points se déduisent par une construction déterminée de ceux de la première, leurs coordonnées seront représentées pareillement par ces expressions où figurent les mêmes variables indépendantes t et u

$$X = \Phi(t, u), \quad Y = \Psi(t, u), \quad Z = \Theta(t, u).$$

Cela étant, la théorie du contact repose encore sur la considération de la fonction $\delta = f(t, u)$, qui donne la distance de deux points correspondants, savoir

$$\begin{aligned}\delta &= [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \{[\Phi(t, u) - \varphi(t, u)]^2 + [\Psi(t, u) - \psi(t, u)]^2 + [\Theta(t, u) - \theta(t, u)]^2\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

et nous dirons qu'en un point donné par les valeurs $t = a$, $u = b$, les surfaces ont un contact du $n^{ième}$ ordre, lorsqu'en posant $t = a + h$, $u = b + k$, la distance δ est infiniment petite d'ordre $n + 1$ par rapport à h et k. Mais il faut tout d'abord préciser ce que l'on entend par l'ordre d'un infiniment petit par rapport à deux autres. Nous imaginerons à cet effet que h et k dépendent d'une seule variable, en faisant par exemple $k = \omega h$, et supposant ω fini. Cela posé, la quantité

$$\delta = f(a + h, b + \omega h)$$

pourra se développer en série suivant les puissances croissantes de h, et il sera désormais entendu qu'elle est infiniment petite d'ordre $n + 1$, lorsque indépendamment de toute valeur attribuée à ω, les coefficients des puissances de h jusqu'à la $n^{ième}$ seront tous nuls. En admettant ce principe, on déduira sur-le-champ de la définition de l'ordre du contact à

l'égard des deux surfaces, ces conséquences qu'il suffit d'énoncer :

1° Les trois différences $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ doivent être chacune infiniment petites de l'ordre $n + 1$.

2° Ces conditions restent les mêmes en changeant les axes coordonnés.

3° Elles subsistent si l'on change de variables indépendantes, en posant

$$t = f(\tau, \upsilon), \quad = f_1(\tau, \upsilon).$$

Ainsi, en admettant qu'à $t = a$, $u = b$ répondent $\tau = \alpha$, $\upsilon = \beta$, et que l'on ait

$$a + h = f(\alpha + i, \beta + j), \quad b + k = f_1(\alpha + i, \beta + j),$$

si les quantités $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ sont infiniment petites d'ordre $n + 1$ par rapport à h et k, elles seront infiniment petites du même ordre par rapport à i et j.

4° Prenant d'après cela pour variables indépendantes les coordonnées x et y, de sorte que les équations des surfaces deviennent

$$z = f(x, y),$$
$$X = \mathfrak{F}(x, y), \quad Y = \mathfrak{F}_1(x, y), \quad Z = F(x, y),$$

une des trois fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, F détermine la nature de la seconde surface, les deux autres, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ par exemple, la loi de correspondance de leurs points, et les conditions relatives aux différences $X - x$, $Y - y$ caractérisent les lois de correspondances compatibles avec la définition de l'ordre du contact. Quant aux conditions concernant les surfaces elles-mêmes, elles se déduisent des développements que donne la série de Taylor étendue à deux variables, savoir

$$F(a + h, b + \omega h)$$
$$= F(a, b) + \left(\frac{dF}{da} + \omega\frac{dF}{db}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2F}{da^2} + 2\omega\frac{d^2F}{da\,db} + \omega^2\frac{d^2F}{db^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$f(a + h, b + \omega h)$$
$$= f(a, b) + \left(\frac{df}{da} + \omega\frac{df}{db}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2f}{da^2} + 2\omega\frac{d^2f}{da\,db} + \omega^2\frac{d^2f}{db^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \ldots;$$

on exprime en effet que la différence $Z - z$ est infiniment

petite d'ordre $n+1$, en posant

$$F(a, b) = f(a, b),$$

$$\frac{dF}{da} + \omega \frac{dF}{db} = \frac{df}{da} + \omega \frac{df}{db},$$

$$\frac{d^2F}{da^2} + 2\omega \frac{d^2F}{da\,db} + \omega^2 \frac{d^2F}{db^2} = \frac{d^2f}{da^2} + 2\omega \frac{d^2f}{da\,db} + \omega^2 \frac{d^2f}{db^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^nF}{da^n} + \frac{n}{1}\omega \frac{d^nF}{da^{n-1}db} + \ldots + \frac{n}{1}\omega^{n-1} \frac{d^nF}{da\,db^{n-1}} + \omega^n \frac{d^nF}{db^n}$$

$$= \frac{d^nf}{da^n} + \frac{n}{1}\omega \frac{d^nf}{da^{n-1}db} + \ldots + \frac{n}{1}\omega^{n-1} \frac{d^nf}{da\,db^{n-1}} + \omega^n \frac{d^nf}{db^n},$$

et considérant ω dans ce système de relations comme une indéterminée; il en résulte que le contact du premier ordre exige trois équations

$$F(a, b) = f(a, b), \quad \frac{dF}{da} = \frac{df}{da}, \quad \frac{dF}{db} = \frac{df}{db},$$

le contact du second ordre six, car aux précédentes il faudra joindre celles-ci

$$\frac{d^2F}{da^2} = \frac{d^2f}{da^2}, \quad \frac{d^2F}{da\,db} = \frac{d^2f}{da\,db}, \quad \frac{d^2F}{db^2} = \frac{d^2f}{db^2},$$

et en général le contact d'ordre n, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations. C'est ce nombre qui donne à la théorie dont nous nous occupons son caractère propre, et éloigne, sauf le premier cas de $n=1$, toute analogie avec celle du contact de deux courbes, ou d'une courbe et d'une surface, comme on va le voir par les applications suivantes.

II. En premier lieu, nous envisagerons le plan

$$Z = aX + bY + c,$$

dont l'équation renferme trois coefficients, de sorte que l'on peut, comme pour la ligne droite à l'égard d'une courbe, obtenir, en un point quelconque

$$X = x, \quad Y = y,$$

un contact de premier ordre avec toute surface $z = f(x, y)$.

Ayant en effet

$$F(X, Y) = aX + bY + c,$$

les conditions

$$F(x, y) = f(x, y), \quad \frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dy}$$

donnent immédiatement

$$z = ax + by + c, \quad a = \frac{dz}{dx}, \quad b = \frac{dz}{dy},$$

et l'on retrouve ainsi l'équation déjà obtenue du plan tangent sous la forme

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y).$$

Nous remarquerons, avant de faire les applications de ce résultat, qu'en supposant parallèle au plan coordonné des XY le plan tangent en x, y, z à la surface $z = f(x, y)$, on a nécessairement

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

Et si le plan des XY est lui-même tangent à l'origine des coordonnées, la fonction $f(x, y)$ ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre s'annuleront pour $x = 0$, $y = 0$, de sorte que le développement par la série de Maclaurin de l'ordonnée z suivant les puissances croissantes de x et y commencera seulement aux termes du second degré, et sera de la forme

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + \ldots.$$

De là se déduirait que la distance au plan tangent d'un point d'une surface infiniment voisin d'un point de contact est un infiniment petit du second ordre. Mais d'une manière plus générale, comme par définition la distance δ de deux points correspondants A et B de deux surfaces, infiniment voisins de leur point de contact, est infiniment petite d'ordre $n + 1$ lorsqu'elles ont un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, il en résulte *à fortiori* que la plus courte distance du point A de la première surface à la seconde, est aussi infiniment petite du même ordre.

Observons enfin qu'en supposant z une fonction implicite déterminée par la relation

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y)$$

reprend la forme sous laquelle nous l'avions précédemment obtenue (p. 129). On a en effet

$$\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{dy} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

et en substituant il vient

$$(X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy} + (Z - z)\frac{df}{dz} = 0.$$

Nous en conclurons pour la normale à la surface, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en x, y, z au plan tangent, les équations

$$\frac{X - x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z - z}{\frac{df}{dz}},$$

en supposant que les axes coordonnés soient rectangulaires.

III. Soit pour première application les surfaces données par l'équation

$$f(x - az, y - bz) = 0,$$

ou plus simplement

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

en posant

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz.$$

On tirera de là

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\alpha}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{df}{d\beta}, \quad \frac{df}{dz} = -a\frac{df}{d\alpha} - b\frac{df}{d\beta},$$

de sorte qu'en réunissant les termes en $\frac{df}{d\alpha}$ et $\frac{df}{d\beta}$, l'équation du plan tangent devient

$$\frac{df}{d\alpha}[X - x - a(Z - z)] + \frac{df}{d\beta}[Y - y - b(Z - z)] = 0.$$

Ce résultat fait voir que, quelle que soit la fonction $f(\alpha, \beta)$, ce plan contient la droite

$$X - x = a(Z - z), \quad Y - y = b(Z - z).$$

Effectivement, l'équation proposée est celle des *surfaces cylindriques*, et le calcul met en évidence cette propriété du plan tangent, de contenir la génératrice qui passe par le point de contact.

Nous considérerons en second lieu les *surfaces coniques*, qui sont données par l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

en posant

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c}, \quad \beta = \frac{y-b}{z-c}.$$

On aura alors

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{z-c}\frac{df}{d\alpha}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{1}{z-c}\frac{df}{d\beta}, \quad \frac{df}{dz} = -\frac{x-a}{(z-c)^2}\frac{df}{d\alpha} - \frac{y-b}{(z-c)^2}\frac{df}{d\beta},$$

et, par suite, pour l'équation du plan tangent, après avoir supprimé le facteur $\frac{1}{z-c}$,

$$\frac{df}{d\alpha}\left[X - x - (Z - z)\frac{x-a}{z-c}\right] + \frac{df}{d\beta}\left[Y - y - (Z - z)\frac{y-b}{z-c}\right] = 0.$$

Il contient donc encore la génératrice qui passe par le point de contact.

En dernier lieu, les équations de la normale aux surfaces de révolution

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

en faisant

$$\alpha = x^2 + y^2, \quad \beta = z,$$

seront

$$\frac{X - x}{2xf'(\alpha)} = \frac{Y - y}{2yf'(\alpha)} = \frac{Z - z}{f'(\beta)},$$

et les deux premières se réduisant à $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$, il en résulte que cette droite est dans le plan déterminé par le point (x, y, z) et l'axe des z, qui est l'axe de révolution de la surface.

IV. Une surface reçoit le nom d'*osculatrice*, lorsqu'on a disposé de toutes les constantes qui fixent sa position et dé-

terminent sa nature, de manière à obtenir, avec une surface donnée, le contact de l'ordre le plus élevé possible. C'est là, comme on voit, l'extension naturelle de la notion qui s'est offerte dans la théorie du contact des courbes considérées sur un plan ou dans l'espace, et qui a reçu, dans le cas du cercle, une application d'une grande importance. Mais toute surface ne peut point devenir osculatrice d'une autre, comme toute courbe plane, quelle qu'elle soit, d'une ligne donnée. Il faut en effet que le nombre des constantes à déterminer soit un terme de la série

$$3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots,\ \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

de sorte qu'il n'y a ni sphère, ni surface du second degré osculatrices, puisque leurs équations générales renferment respectivement 4 et 9 coefficients. En général, une surface du $m^{ième}$ degré en contient $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}-1$, ce qui conduit à poser l'équation

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}-1,$$

dont il y aurait lieu ainsi de rechercher toutes les solutions en nombres entiers et positifs pour m et n. Mais l'Arithmétique supérieure ne donne à cet égard aucune méthode, et je me bornerai à remarquer qu'on y satisfait, par les moindres nombres, en prenant $m=5$ et $n=9$. Il n'y a donc aucune surface algébrique, de degré inférieur à 5, pouvant être osculatrice, de sorte que la théorie actuelle ne semble pas applicable au delà du plan et du contact du premier ordre. La considération suivante permettra cependant d'aller plus loin. En disposant des deux coordonnées d'un point d'une surface, on peut en effet ajouter deux constantes à celles qui déterminent une sphère, et par conséquent la rendre en ces points osculatrice du second ordre, puisqu'on aura le nombre voulu de six quantités arbitraires. En disposant d'une seule des coordonnées, on ajoute une arbitraire aux neuf coefficients d'une surface du second degré, ce qui permettra de la rendre oscu-

latrice du troisième ordre, non plus alors en un certain nombre de points, mais, comme il le semble au premier abord, tout le long d'une ligne déterminée d'une surface quelconque. Nous allons traiter ces deux questions.

V. L'équation de la sphère étant

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=R^2,$$

on obtiendra les dérivées du premier ordre

$$P=\frac{dZ}{dX},\quad Q=\frac{dZ}{dY}$$

par les relations

$$X-a+P(Z-c)=0,$$
$$Y-b+Q(Z-c)=0,$$

et celles du second

$$R=\frac{d^2Z}{dX^2},\quad S=\frac{d^2Z}{dX\,dY},\quad T=\frac{d^2Z}{dY^2},$$

par celles-ci, qui s'en déduisent en différentiant successivement par rapport à X et à Y,

$$1+P^2+R(Z-c)=0,$$
$$PQ+S(Z-c)=0,$$
$$1+Q^2+T(Z-c)=0.$$

Or, les conditions du contact du second ordre avec une surface quelconque $z=f(x,y)$, au point $X=x$, $Y=y$, sont

$$Z=z,\quad P=\frac{dz}{dx},\quad Q=\frac{dz}{dy},$$
$$R=\frac{d^2z}{dx^2},\quad S=\frac{d^2z}{dx\,dy},\quad T=\frac{d^2z}{dy},$$

de sorte qu'en faisant

$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{d^2z}{dx^2},\quad s=\frac{d^2z}{dx\,dy},\quad t=\frac{d^2z}{dy^2},$$

nous les obtiendrons en remplaçant dans les relations précédentes X, Y, Z, P, Q, R, S, T par x, y, z, p, q, r, s, t, ce qui

donnera

$$x - a + p(z - c) = 0,$$
$$y - b + q(z - c) = 0,$$
$$1 + p^2 + r(z - c) = 0,$$
$$pq + s(z - c) = 0,$$
$$1 + q^2 + t(z - c) = 0.$$

Cela étant, les trois dernières conduisent immédiatement par l'élimination de c ou plutôt de $z - c$ aux deux équations de condition cherchées entre x et y, savoir

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t},$$

et, en chassant les dénominateurs,

$$(1 + p^2)s - pqr = 0,$$
$$(1 + p^2)t - (1 + q^2)r = 0.$$

On donne le nom d'*ombilics* aux points de la surface $z = f(x, y)$ que déterminent ces relations, et que bientôt nous verrons s'offrir sous un autre point de vue. Je me bornerai en ce moment à les obtenir à l'égard de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où ils ont un rôle extrêmement important dans l'étude géométrique des courbes tracées sur cette surface. En formant à cet effet les valeurs des quantités p, q, r, s, t, on trouve

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$
$$r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

et, après quelques réductions, il viendra simplement

$$(a^2 - c^2)xy = 0, \quad b^2(a^2 - c^2)x^2 - a^2(b^2 - c^2)y^2 - a^2 b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Ces relations sont identiques dans le cas où l'ellipsoïde se réduit à une sphère, comme on pouvait le prévoir; mais si les axes sont inégaux, et que l'on suppose

$$a > b > c,$$

nous parviendrons très-aisément à ces solutions, les seules réelles, savoir

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

On en conclut que les ombilics sont les quatre points où les plans des sections circulaires deviennent tangents à la surface.

VI. Dans la seconde question, il s'agit de l'équation générale du second degré

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY \\ + 2cX + 2c'Y + 2c''Z + d = 0, \end{aligned}$$

et des conditions du contact du troisième ordre avec la surface quelconque $z = f(x, y)$. Alors il est nécessaire d'introduire, en outre des dérivées partielles du premier et du second ordre p, q, r, s, t, celles du troisième que je désignerai ainsi

$$g = \frac{d^3z}{dx^3}, \quad h = \frac{d^3z}{dx^2\,dy}, \quad k = \frac{d^3z}{dx\,dy^2}, \quad l = \frac{d^3z}{dy^3}.$$

Cela étant, et sans répéter ce qui a été dit tout à l'heure à propos de la sphère, j'écrirai immédiatement ces relations

$$\begin{gathered} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0, \\ (b'x + by + a''z + c'')p + ax + b''y + b'z + c = 0, \\ (b'x + by + a''z + c'')q + b''x + a'y + bz + c' = 0; \end{gathered}$$

puis celles-ci, qui contiennent les dérivées du second ordre, et où je fais, pour abréger,

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{dF}{dz} = b'x + by + a''z + c'',$$

savoir

$$\begin{gathered} \omega r + a''p^2 + 2b'p + a = 0, \\ \omega s + a''pq + bp + b'q + b'' = 0, \\ \omega t + a''q^2 + 2bq + a' = 0. \end{gathered}$$

On en tire, par la différentiation, ces quatre dernières

équations, où entrent les dérivées partielles du troisième ordre, et qui ne contiennent plus que les coefficients a'', b, b', c'' sous forme homogène,

$$\omega g + 3(a''p + b')r = 0,$$
$$\omega h + (a''q + b)r + 2(a''p + b')s = 0,$$
$$\omega k + (a''p + b')t + 2(a''q + b)s = 0,$$
$$\omega l + 3(a''q + b)t = 0.$$

Voici la conséquence remarquable à laquelle elles conduisent; deux d'entre elles donnent

$$a''p + b' = -\frac{\omega g}{3r}, \quad a''q + b = -\frac{\omega l}{3t},$$

et, en substituant dans les deux autres, la quantité ω disparaîtra comme facteur commun, de sorte qu'au lieu d'une seule équation de condition entre x et y, nous obtenons les deux suivantes (*)

$$3hrt - lr^2 - 2gst = 0,$$
$$3krt - gt^2 - 2lrs = 0.$$

Mais, en même temps, les inconnues a'', b, b', c'', entre lesquelles on n'a plus que deux équations, et par suite tous les coefficients de $F(X, Y, Z)$, s'exprimeront en fonction linéaire et homogène de deux indéterminées λ et μ, de sorte qu'on doit poser

$$F(X, Y, Z) = \lambda\Phi + \mu\Phi_1,$$

où Φ et Φ_1 sont des polynômes entièrement déterminés. Il s'ensuit qu'en un nombre fini de points de la surface $z = f(x, y)$, et non le long d'une ligne comme on l'avait d'abord présumé, nous obtenons un faisceau de surfaces, au lieu d'une surface osculatrice unique du second degré (**).

(*) Elles expriment, comme on le vérifie aisément, que le polynôme du troisième degré $g\lambda^3 + 3h\lambda^2 + 3k\lambda + l$ est exactement divisible par $r\lambda^2 + 2s\lambda + t$.

(**) Il est remarquable qu'on trouve des lignes en appliquant cette théorie aux surfaces du troisième degré; ces lignes sont les 27 droites situées sur ces surfaces.

DE LA COURBURE.

Cette théorie, qui se lie naturellement à celle du contact géométrique, a une portée beaucoup plus étendue, et nous nous bornerons ici à en donner les principes les plus simples, sans entrer dans les résultats si importants obtenus depuis Euler sur la courbure des surfaces et des lignes tracées sur la sphère ou sur une surface quelconque. Je renverrai, pour l'étude de ces belles questions, au premier volume du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand, et, en me limitant à un petit nombre de points fondamentaux, je considérerai successivement les courbes planes, les courbes dans l'espace et, en dernier lieu, les surfaces.

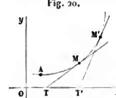
Courbes planes.

I. La courbure que l'on regarde comme une notion géométrique première et irréductible s'offre sous son aspect le plus simple en considérant le cercle; on dit en effet que, pour cette ligne, la courbure est uniforme et la même en tous ses points. Mais elle varie d'un cercle à un autre, et si l'on envisage, pour fixer les idées, les cercles tangents à une même droite en un point, on observera qu'ils tendent, dans le voisinage de leur point de contact, à se rapprocher de cette droite quand le rayon augmente; on dit alors que la courbure diminue, et c'est ce qui amène à introduire dans le calcul la notion dont il s'agit, en lui donnant pour mesure dans le cercle l'inverse du rayon, c'est-à-dire la plus simple des fonctions qui décroissent quand la variable augmente. Or on peut représenter l'inverse du rayon par l'angle de deux tangentes quelconques divisé par l'arc compris entre leurs points de contact, ce qui est une combinaison d'éléments géométriques susceptible d'être considérée à l'égard d'une courbe de nature quelconque. Nous nommerons ainsi *courbure moyenne*

d'un arc le quotient obtenu en divisant par la longueur de cet arc l'angle des tangentes menées à ses extrémités, et la limite de ce rapport, en supposant l'arc infiniment petit, deviendra en un point donné la courbure dont nous allons chercher l'expression au moyen des coordonnées rectangulaires x et y de ce point.

Soit l'équation de la courbe proposée $y=f(x)$, s la longueur de l'arc comptée d'une origine quelconque A (*fig.* 20) jusqu'au point M, dont les coordonnées sont x et y, et α l'angle que fait en ce point la tangente MT avec l'axe des abscisses. En faisant croître x de sa différentielle, on passe du point M au point infiniment voisin M', l'angle $\alpha = \text{MT}x$ deviendra par suite $\text{M'T'}x = \alpha + d\alpha$,

Fig. 20.



l'arc $\text{AM} = s$ croîtra de $\text{MM'} = ds$; or l'angle des deux tangentes MT et M'T', appelé l'angle de contingence, sera évidemment $\text{M'T'}x - \text{MT}x = d\alpha$, et la courbure se trouvera ainsi représentée par $\frac{d\alpha}{ds}$, qu'il s'agit maintenant d'obtenir en fonction de x et de y. De l'équation

$$\tang \alpha = \frac{dy}{dx},$$

tirons à cet effet

$$\alpha = \operatorname{arc\,tang} \frac{dy}{dx};$$

on en déduira

$$d\alpha = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et, par suite, en prenant d'abord x pour variable indépendante,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle sera donc la courbure cherchée au point M; or, en

concevant un cercle ayant son centre situé sur la normale à la courbe en ce point, et dont le rayon soit déterminé par la condition

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds},$$

sa courbure sera précisément celle de la courbe, et l'expression de R en x et en y, savoir

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

nous montre qu'on retrouve, sous un nouveau point de vue, le cercle osculateur. En effet cette valeur a été obtenue dans la théorie du contact, où elle a été déduite des conditions

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

dont la seconde montre que les coordonnées du centre du cercle osculateur satisfont à l'équation de la normale

$$(X-x)+(Y-y)\frac{dy}{dx}=0$$

à la courbe proposée $y=f(x)$. Nous avons aussi obtenu, page 115, lorsque la courbe est donnée par les équations

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

l'expression plus générale

$$R=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi'\varphi''-\psi''\varphi'}.$$

Voici deux formes analytiques importantes qui s'en déduisent.

II. Supposons d'abord que la variable t soit l'angle polaire ω, de sorte que, ρ désignant le rayon vecteur fonction de cet angle, on ait

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega.$$

Nous appliquerons la formule en partant de la relation

$$x + y\sqrt{-1} = \varphi + \psi\sqrt{-1} = \rho e^{\omega\sqrt{-1}},$$

qui donnera, en prenant les dérivées par rapport à ω,

$$\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi' = \left(\frac{d\rho}{d\omega} + \sqrt{-1}\,\rho\right)e^{\omega\sqrt{-1}},$$

$$\varphi'' + \sqrt{-1}\,\psi'' = \left(\frac{d^2\rho}{d\omega^2} + 2\sqrt{-1}\frac{d\rho}{d\omega} - \rho\right)e^{\omega\sqrt{-1}}.$$

J'y changerai ensuite le signe de $\sqrt{-1}$, de manière à obtenir

$$\varphi' - \sqrt{-1}\,\psi' = \left(\frac{d\rho}{d\omega} - \sqrt{-1}\,\rho\right)e^{-\omega\sqrt{-1}},$$

et je multiplierai membre à membre avec la seconde égalité. En formant alors de part et d'autre les coefficients de $\sqrt{-1}$, il viendra

$$\psi'\varphi'' - \psi''\varphi' = \rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho^2,$$

et, par conséquent,

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho^2}.$$

La seconde forme du rayon de courbure se rapporte au cas où les coordonnées x et y sont données en fonction de l'arc s. Elle s'obtient en introduisant la condition

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$$

dans l'expression générale, qui devient d'abord

$$R = \frac{1}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}.$$

On remarque ensuite que l'équation identique

$$(\varphi'^2 + \psi'^2)(\varphi''^2 + \psi''^2) - (\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')^2 = (\psi''\varphi' - \psi'\varphi'')^2$$

donne

$$\varphi''^2 + \psi''^2 = (\psi''\varphi' - \psi'\varphi'')^2,$$

à cause de la condition admise et de celle-ci

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0,$$

qui s'en tire par la différentiation. Nous avons donc la formule

$$\frac{1}{R^2} = \varphi''^2(s) + \psi''^2(s),$$

dont je vais faire une application en cherchant l'expression de la différence entre la longueur d'un arc infiniment petit et sa corde.

Je considère à cet effet les équations

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

dans le cas où l'origine est au point de la courbe correspondant à $s = 0$, l'axe des x étant de plus une tangente et l'axe des y une normale, ce qui suppose

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s) = 0$$

pour $s = 0$. Les développements par la série de Maclaurin des fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ seront donc

$$\varphi(s) = s + as^2 + a's^3 + \ldots,$$
$$\psi(s) = bs^2 + b's^3 + \ldots;$$

et la condition

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1,$$

c'est-à-dire

$$(1 + 2as + 3a's^2 + \ldots)^2 + (2bs + 3b's^2 + \ldots)^2 = 1,$$

donnera, comme à la page 137,

$$a = 0, \quad a' = -\tfrac{2}{3}b^2,$$

d'où, pour $s = 0$,

$$\varphi''^2(s) + \psi''^2(s) = 4b^2.$$

Nous pouvons ainsi poser, en désignant par R le rayon de courbure à l'origine,

$$\frac{1}{R^2} = 4b^2;$$

il en résulte, pour la distance de cette origine à un point de

la courbe,

$$\sqrt{x^2+y^2} = \left[\left(s - \frac{1}{6R^2}s^3 + a''s^4 + \ldots\right)^2 + \left(\frac{1}{2R}s^2 + b's^3 + \ldots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(s^2 - \frac{1}{12R^2}s^4 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} = s - \frac{1}{24R^2}s^3 + \ldots,$$

et, en supposant s infiniment petit, on a ce théorème :

La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est un infiniment petit du troisième ordre, à savoir le cube de l'arc divisé par 24 fois le carré de son rayon de courbure.

Observons que cette différence, lorsque $\frac{1}{R} = 0$ (ce qui est le cas d'un point d'inflexion), ne serait plus du troisième, ni même du quatrième ordre, mais du cinquième. Plus généralement, admettons que l'axe des abscisses ait avec la courbe proposée un contact d'ordre n; il faudra, d'après la théorie connue, que la différence entre l'ordonnée de la droite, qui est nulle actuellement, et celle de la courbe, c'est-à-dire précisément cette ordonnée $y = \psi(s)$, soit infiniment petite d'ordre $n+1$, par rapport à s. On doit donc poser

$$\psi(s) = ks^{n+1} + k's^{n+2} + \ldots,$$

d'où

$$\varphi'(s) = [1 - \psi'^2(s)]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(n+1)^2k^2}{2}s^{2n} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\varphi(s) = s - \frac{(n+1)^2k^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \ldots,$$

sans ajouter de constante, d'après la condition admise que l'origine des coordonnées correspond à la valeur $s = 0$. Il en résulte, pour $x^2 + y^2$, l'expression suivante

$$x^2 + y^2 = \left[s - \frac{(n+1)^2k^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \ldots\right]^2 + (ks^{n+1} + k's^{n+2} + \ldots)^2$$

$$= s^2 - \frac{n^2k^2}{2n+1}s^{2n+2} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\sqrt{x^2+y^2} = s - \frac{n^2k^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \ldots,$$

de sorte que la différence entre l'arc infiniment petit et sa corde est, dans le cas actuel, un infiniment petit d'ordre $2n+1$.

III. L'expression du rayon de courbure dont nous venons de faire usage peut encore se tirer directement de la relation

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds},$$

comme nous allons le montrer.

J'observe, à cet effet, que les coordonnées x et y étant exprimées en fonction de l'arc par les formules

$$x=\varphi(s),\quad y=\psi(s),$$

on aura

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\varphi'(s),$$

$$\sin\alpha=\frac{dy}{ds}=\psi'(s),$$

et ces équations, différentiées par rapport à s, donneront

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\varphi''(s),\quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\psi''(s),$$

ou bien

$$\frac{-\psi'(s)}{R}=\varphi''(s),\quad \frac{\varphi'(s)}{R}=\psi''(s).$$

Or, en élevant au carré et ajoutant membre à membre, on obtient sur-le-champ

$$\frac{1}{R^2}=\varphi''^2(s)+\psi''^2(s).$$

J'y joindrai celle-ci, dont il sera fait usage plus tard, savoir

$$\frac{1}{R^3}=\psi'''\varphi''-\psi''\varphi'''.$$

Elle se démontre en observant que l'on a par la différentiation

$$\varphi'''=-\frac{\psi''}{R}+\frac{\psi'R'}{R^2},$$

$$\psi'''=+\frac{\varphi''}{R}-\frac{\varphi'R'}{R^2}.$$

Ajoutant ensuite ces relations membre à membre, après avoir multiplié la première par $-\psi''$, la seconde par φ'', et employant la condition

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0,$$

il vient en effet

$$\psi'''\varphi'' - \psi''\varphi''' = \frac{\varphi''^2 + \psi''^2}{R} = \frac{1}{R^3}.$$

Remarquons enfin que les équations

$$-\frac{\psi'}{R} = \varphi'', \quad \frac{\varphi'}{R} = \psi''$$

déterminent les fonctions φ et ψ, c'est-à-dire les coordonnées de la courbe, lorsque le rayon de courbure est donné en fonction de l'arc s. On en tire, en effet,

$$\varphi'' + \sqrt{-1}\,\psi'' = \frac{\sqrt{-1}}{R}(\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi'),$$

ou bien

$$\frac{\varphi'' + \sqrt{-1}\,\psi''}{\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi'} = \frac{\sqrt{-1}}{R}.$$

Or, le premier membre étant la dérivée de $\log(\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi')$, on connaîtra cette quantité si l'on sait former la fonction primitive de $\frac{1}{R}$. Supposons, par exemple, que R soit constant, nous aurons immédiatement

$$\log(\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi') = \frac{\sqrt{-1}\,s}{R} + C,$$

C désignant une constante arbitraire qui peut être imaginaire, et que nous représenterons par $\log a + \sqrt{-1}\,\frac{\alpha}{R}$. On en conclut

$$\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi' = a e^{\sqrt{-1}\,\frac{s+\alpha}{R}},$$

et par conséquent

$$\varphi' = a\cos\frac{s+\alpha}{R}, \quad \psi' = a\sin\frac{s+\alpha}{R}.$$

La condition $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ donne d'ailleurs

$$a^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad a = 1,$$

$\log a$ étant supposé réel; quant aux fonctions primitives de $\cos \frac{s+\alpha}{R}$ et $\sin \frac{s+\alpha}{R}$, elles sont évidemment

$$R \sin \frac{s+\alpha}{R}, \quad -R \cos \frac{s+\alpha}{R},$$

de sorte que l'on obtient définitivement, avec deux nouvelles constantes arbitraires,

$$x = +R \sin \frac{s+\alpha}{R} + x_0,$$

$$y = -R \cos \frac{s+\alpha}{R} + y_0,$$

ce qui donne l'équation du cercle

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Le cercle est donc la seule courbe dont le rayon de courbure soit constant.

IV. A la théorie de la courbure se rattache l'étude du lieu des centres de courbure aux divers points d'une ligne donnée $y = f(x)$, qui a reçu le nom de *développée* de cette courbe. Cette étude repose en entier sur les équations

$$x - \alpha + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

qui déterminent en fonction de l'abscisse x les coordonnées α et β du centre de courbure, et d'où l'on tirerait, par l'élimination de cette variable, l'équation de la développée. La première propriété que nous en déduirons consiste en ce que la tangente à la développée est normale à la courbe proposée.

A cet effet, je considère α et β, en vertu des deux relations ci-dessus, comme des fonctions de la variable indépendante x,

et j'indique la première, pour abréger, par

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

En différentiant par rapport à x, on aura

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or la somme des deux premiers termes, étant précisément la dérivée dans l'hypothèse de α et β constants, est nulle à cause de la seconde relation. En les supprimant, on obtient, pour la détermination du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$,

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

d'où résulte, comme on voit, la proposition annoncée.

La seconde propriété concerne la rectification de la développée. Ce qui s'offrirait alors naturellement serait d'exprimer en fonction de x les différentielles $d\alpha$ et $d\beta$, en partant des valeurs

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx}\,\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

afin d'en déduire la différentielle de l'arc $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$. Mais on opère différemment; on introduit le rayon du cercle osculateur en tirant $d\alpha$ et $d\beta$ de l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

différentiée par rapport à x, et de la relation précédente $1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, qui, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$, devient

$$(y - \beta)\,d\alpha - (x - \alpha)\,d\beta = 0.$$

En effet si l'on supprime, dans la différentielle de l'équation du cercle, les termes qui se détruisent comme prove-

nant de la variation de x et y seuls, les autres quantités α, β, R étant supposées constantes, il restera simplement

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta = -R\,dR,$$

et l'on tirera des deux relations en $d\alpha$ et $d\beta$ ces expressions très-simples

$$d\alpha = \frac{\alpha - x}{R}\,dR, \quad d\beta = \frac{\beta - y}{R}\,dR$$

et, par conséquent,

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = dR^2.$$

On pourrait même opérer plus rapidement, en élevant au carré et ajoutant membre à membre les deux relations

$$(y-\beta)\,d\alpha - (x-\alpha)\,d\beta = 0,$$
$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta) = -R\,dR.$$

Nommant donc σ l'arc de la développée compté à partir d'une origine fixe, on aura

$$d\sigma = \pm\,dR.$$

Cela étant, supposons que, σ croissant à partir de cette origine jusqu'à une certaine limite, R varie toujours dans le même sens, et augmente par exemple, on devra prendre

$$d\sigma = dR,$$

d'où

$$\sigma = R + C.$$

Soient donc σ_0 et R_0 deux valeurs simultanées quelconques de ces quantités, on aura

$$\sigma_0 = R_0 + C,$$

et, par conséquent,

$$\sigma - \sigma_0 = R - R_0.$$

Mais si, dans une autre portion de la courbe, R, variant dans un autre sens, va, au contraire, en diminuant, on devra prendre

$$d\sigma = -\,dR,$$

et l'on trouvera

$$\sigma - \sigma_0 = R_0 - R.$$

Ainsi la longueur d'un arc de développée, lorsqu'on suppose le rayon du cercle osculateur variant dans le même sens

d'une de ses extrémités à l'autre, est égale à la différence des rayons qui correspondent à ces extrémités.

Cet énoncé se modifie dans le cas, par exemple, où le rayon passe par un maximum ρ; soient alors R_0 et R_1 les valeurs extrêmes, l'arc de développée, se décomposant en deux parties représentées par $\rho - R_0$ et $\rho - R_1$, aura pour expression

$$\sigma = 2\rho - R_0 - R_1.$$

Enfin, s'il s'agit d'une courbe fermée n'ayant aucun point d'inflexion, et dont la développée soit finie (*) et fermée, son périmètre total sera le double de la différence entre la somme des rayons de courbure maxima et la somme des rayons minima, pour tous les points de la courbe proposée.

La relation $d\sigma^2 = dR^2$ peut aussi s'obtenir comme conséquence des égalités

$$\alpha = \varphi - \psi' R, \quad \beta = \psi + \varphi' R$$

données p. 116. On en tire en effet

$$\frac{d\alpha}{ds} = \varphi' - \psi' R' - \psi'' R,$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \psi' + \varphi' R' + \varphi'' R,$$

et plus simplement

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\psi' R', \quad \frac{d\beta}{ds} = \varphi' R',$$

à cause des relations

$$-\frac{\psi'}{R} = \varphi'', \quad \frac{\varphi'}{R} = \psi'',$$

établies p. 156; or on voit que la somme des carrés donne immédiatement

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = dR^2.$$

La géométrie enfin conduit facilement, comme il suit, au même résultat.

(*) Le rayon du cercle osculateur devient infini en un point d'inflexion, parce que l'on a dans ce cas : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Fig. 21.

Considérons, en effet, deux tangentes infiniment voisines MT, M'T (*fig.* 21) à la courbe $y=f(x)$, et soient M et M' les points de contact, MN et M'N les normales dont l'intersection en N détermine un point de la développée. L'hypoténuse NT, commune aux triangles rectangles NMT, NM'T, est, aux infiniment petits près du second ordre, égale aux côtés NM et NM'; car les angles en N sont infiniment petits. Donc ces lignes ne diffèrent elles-mêmes que d'un infiniment petit du second ordre; par conséquent, en passant de M à M', l'accroissement de $MN = R$ sera précisément la distance du point N de la développée au point infiniment voisin N', distance qui est l'élément $d\sigma$; on a donc bien $ds = dR$, quand R augmente avec σ.

V. Nous ferons une première application des résultats qui précèdent en considérant l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A cet effet, il suffit de rappeler qu'en posant

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

on a obtenu, dans la théorie du contact, p. 115, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur, les expressions

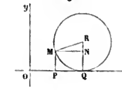
$$\alpha = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \quad \beta = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Elles donnent immédiatement, en éliminant t, l'équation de la développée sous la forme

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Soit en second lieu la cycloïde, qui est le lieu des positions d'un cercle roulant sans glisser sur une droite. Prenons cette droite pour axe des abscisses, pour origine le point O (*fig.* 22), où se trouvait, au commencement du mouvement, le point générateur du cercle mobile, que je considère

Fig. 22.



ensuite dans une position quelconque en M, de sorte que les coordonnées d'un point du lieu soient MP et OP. La distance de l'origine au point de contact Q sera égale à l'arc MQ par définition, et, en désignant l'angle MRQ par t, par a le rayon du cercle, nous aurons

$$OQ = at.$$

Cela posé, si l'on mène MN parallèlement à PQ, on obtiendra évidemment

$$MN = PQ = a\sin t, \quad RN = a\cos t,$$

d'où résulte

$$x = OQ - PQ = a(t - \sin t) = \varphi(t),$$
$$y = RQ - RN = a(1 - \cos t) = \psi(t).$$

Ces expressions de x et y, au moyen de l'angle t, permettent de discuter la courbe qu'on reconnaît facilement se composer d'une suite d'arcs identiques à celui qui est donné par les valeurs de t comprises de zéro à π. Elles conduisent aussi à une détermination facile des coordonnées du centre de courbure. Appliquons à cet effet les formules établies p. 115, savoir

$$\alpha = \varphi + \frac{\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}, \quad \beta = \psi - \frac{\varphi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}.$$

En remarquant qu'on tire des expressions des coordonnées les valeurs

$$\varphi' = a(1 - \cos t), \quad \psi' = a\sin t,$$
$$\varphi'' = a\sin t, \quad \psi'' = a\cos t,$$

d'où

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 2a^2(1 - \cos t), \quad \psi'\varphi'' - \psi''\varphi' = a^2(1 - \cos t),$$

on en conclura sur-le-champ

$$\alpha = a(t + \sin t), \quad \beta = a(-1 + \cos t).$$

Je dis maintenant que ces relations représentent la même cycloïde rapportée à d'autres axes. Changeant d'abord t en $t + \pi$, ce qui n'altère point la nature de la courbe, il vient

$$\alpha = a\pi + a(t - \sin t), \quad \beta = -a(1 + \cos t),$$

et si nous posons ensuite

$$\alpha = x + a\pi, \quad \beta = y - 2a,$$

on trouvera, par rapport aux nouveaux axes,

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

c'est-à-dire précisément les équations de la cycloïde proposée. On a donc ce théorème :

La développée de la cycloïde s'obtient en construisant une cycloïde égale, par rapport à des axes coordonnés parallèles et dirigés dans le même sens, dont l'origine est le point $\alpha = a\pi$, $\beta = -2a$.

VI. J'ajouterai encore quelques remarques sur les rayons de courbure de ces deux lignes. En rapprochant d'abord la formule relative à l'ellipse

$$R = \frac{1}{ab}(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

de l'expression de la normale, savoir

$$N = y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = y\left[1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{a}(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient la relation remarquable

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

où je fais, suivant l'usage,

$$\frac{b^2}{a} = p.$$

D'autre part, introduisons, à la place de t, l'angle θ déterminé par la formule

$$\tang \theta = \frac{c}{b} \sin t,$$

nous aurons ces expressions plus simples

$$N = \frac{p}{\cos\theta}, \quad R = \frac{p}{\cos^3\theta}.$$

En joignant au foyer le point de l'ellipse dont les coordon-

nées sont $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, et considérant la normale au même point, θ est précisément l'angle de ces deux droites; car le coefficient angulaire de la première est $\frac{b\sin t}{a\cos t - c}$, le coefficient angulaire de la normale a pour valeur

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{a\sin t}{b\cos t},$$

et de là résulte bien

$$\tang\theta = \frac{\frac{b\sin t}{a\cos t - c} - \frac{a\sin t}{b\cos t}}{1 + \frac{ab\sin^2 t}{(a\cos t - c)b\cos t}} = \sin t\,\frac{ac - c^2\cos t}{ab - bc\cos t} = \frac{c}{b}\sin t.$$

A l'égard de la cycloïde, l'expression de la normale

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

conduit à ce résultat très-simple

$$N = a(1 - \cos t)\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Si l'on calcule ensuite le rayon de courbure

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

d'après les valeurs précédemment trouvées pour α et β, qui donnent

$$x - \alpha = -2a\sin t,$$

$$y - \beta = 2a(1 - \cos t),$$

on obtient

$$R = 4a\sin\frac{t}{2},$$

d'où, par conséquent,

$$R = 2N.$$

Nous remarquerons enfin l'expression de la sous-normale

$$SN = y\frac{dy}{dx} = a(1 - \cos t)\,\frac{\sin t}{1 - \cos t} = a\sin t.$$

Ayant

$$x = a(t - \sin t),$$

on peut l'écrire de cette manière

$$SN = at - x,$$

et la figure qui a servi à trouver l'équation de la courbe montre que

$$SN = OQ - OP = PQ,$$

de sorte que la normale à la cycloïde s'obtient en joignant le point décrivant du cercle mobile à son point de contact sur l'axe.

Pour dernière application, soit

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t),$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} \varphi &= a(\cos t + t\sin t), & \psi &= a(\sin t - t\cos t), \\ \varphi' &= at\cos t, & \psi' &= at\sin t, \\ \varphi'' &= a(\cos t - t\sin t), & \psi'' &= a(\sin t + t\cos t), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = a^2t^2, \quad \psi'\varphi'' - \psi''\varphi' = -a^2t^2;$$

nous en conclurons

$$\alpha = a\cos t, \quad \beta = a\sin t,$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

La courbe proposée a donc pour développée une circonférence de cercle; elle joue un rôle important dans la mécanique, et reçoit le nom de *développante* du cercle.

Courbes dans l'espace.

I. On nomme encore *angle de contingence* en un point d'une courbe dans l'espace l'angle ω que font entre elles les deux tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit ds, et *courbure* la limite du rapport $\frac{\omega}{ds}$. L'inverse de cette quantité $\frac{ds}{\omega}$ représentera, en suivant la même analogie, le *rayon de courbure;* nous allons en calculer l'expression.

Supposons toujours que la courbe proposée soit donnée par les relations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

la variable t étant quelconque. Les cosinus des angles que fait avec les axes coordonnés la tangente au point (x, y, z) sont, comme on sait,

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}.$$

Or, en faisant croître de sa différentielle la variable t, on passe du point considéré de la courbe au point infiniment voisin, et les cosinus des angles de la tangente avec les axes en ce même point sont évidemment

$$a' = a + da, \quad b' = b + db, \quad c' = c + dc.$$

L'angle de contingence, qui a été nommé ω, sera donc déterminé par la formule

$$\cos\omega = aa' + bb' + cc',$$

ou plutôt par celle-ci qu'il est préférable d'employer

$$\begin{aligned} \sin\omega &= [(cb' - bc')^2 + (ac' - ca') + (ba' - ab')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(cdb - bdc)^2 + (adc - cda)^2 + (bda - adb)^2]^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

et comme le sinus est égal à l'arc aux infiniment petits près du troisième ordre, nous aurons

$$\omega = [(cdb - bdc)^2 + (adc - cda)^2 + (bda - adb)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Or, en différentiant a et b par rapport à t, on obtient ces valeurs

$$da = \frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{d^2y\,ds - dy\,d^2s}{ds^2},$$

et nous en conclurons, après une réduction facile,

$$b\,da - a\,db = \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^2} = \frac{(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')\,dt}{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2};$$

nous aurons de même

$$c\,db - b\,dc = \frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{ds^2} = \frac{(\theta'\psi'' - \psi'\theta'')\,dt}{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2},$$

$$a\,dc - c\,da = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^2} = \frac{(\varphi'\theta'' - \theta'\varphi'')\,dt}{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{ds}{\omega} = R = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{[(\theta'\psi'' - \psi'\theta'')^2 + (\varphi'\theta'' - \theta'\varphi'')^2 + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est le résultat qu'on s'était proposé d'obtenir, et qui coïncide, comme dans le cas des courbes planes, avec le rayon du cercle osculateur tel que nous l'avons obtenu, p. 124, dans la théorie du contact en fonction de la variable t. Il devient plus simple, si nous supposons que t soit l'arc s de la courbe, de sorte qu'on ait les relations

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + \theta'^2(s) = 1,$$
$$\varphi'(s)\varphi''(s) + \psi'(s)\psi''(s) + \theta'(s)\theta''(s) = 0.$$

En employant en effet l'identité dont nous avons déjà fait usage

$$\begin{aligned}(\theta'\psi'' - \psi'\theta'')^2 + (\varphi'\theta'' - \theta'\varphi'')^2 + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')^2 \\ = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)(\varphi''^2 + \psi''^2 + \theta''^2) - (\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'')^2,\end{aligned}$$

on trouvera

$$\frac{1}{R} = [\varphi''^2(s) + \psi''^2(s) + \theta''^2(s)]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule nous donne une conséquence importante, en employant les expressions des coordonnées établies page 137,

$$x = s - \tfrac{2}{3}B^2s^3 + \ldots, \quad y = Bs^2 + B's^3 + \ldots, \quad z = Cs^3 + \ldots,$$

l'origine étant un point de la courbe qui correspond à $s = 0$, le plan des xy étant le plan osculateur, les axes des x et des y la tangente et la normale. Effectivement, on obtient immédiatement, pour $s = 0$,

$$\varphi''^2 + \psi''^2 + \theta''^2 = \frac{1}{R^2} = 4B^2,$$

de sorte qu'à l'origine, le rayon de courbure dans l'espace n'est autre que celui de sa projection sur le plan osculateur. Enfin, nous aurons, aux infiniment petits près d'un ordre su-

périeur au troisième,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2} = s - \tfrac{1}{6}B^2s^3 + \ldots = s - \frac{s^3}{24R^2} + \ldots,$$

comme pour les courbes planes.

II. L'angle de torsion en un point d'une courbe dans l'espace est l'angle ε que font entre eux deux plans osculateurs menés aux extrémités d'un arc infiniment petit ds; la limite du rapport $\frac{ds}{\varepsilon} = r$ est le rayon de torsion, que nous allons encore calculer en supposant la courbe définie par les relations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t).$$

Partant à cet effet de l'équation du plan osculateur

$$A(X-\varphi) + B(Y-\psi) + C(Z-\theta) = 0,$$

où je fais comme précédemment

$$A = \theta'\psi'' - \psi'\theta'',$$
$$B = \varphi'\theta'' - \theta'\varphi'',$$
$$C = \psi'\varphi'' - \varphi'\psi'',$$

je conçois que la variable indépendante t croisse de sa différentielle. Nous passerons ainsi du point (x, y, z) au point infiniment voisin; l'arc s de la courbe, compté depuis une certaine origine jusqu'à ce point, croîtra de ds; les coefficients du plan osculateur deviendront

$$A' = A + dA, \quad B' = B + dB, \quad C' = C + dC,$$

où les différentielles sont prises par rapport à t, et l'angle infiniment petit nommé ε sera donné par la formule

$$\cos\varepsilon = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Mais, comme à l'occasion de l'angle de contingence, je ferai usage de celle-ci

$$\sin\varepsilon = \frac{[(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

et il viendra, en substituant l'arc infiniment petit au sinus, divisant par ds, et remplaçant au dénominateur A', B', C' par A, B, C, comme on peut le faire,

$$\frac{\varepsilon}{ds}=\frac{1}{r}=\frac{[(A\,dB-B\,dA)^2+(B\,dC-C\,dB)^2+(C\,dA-A\,dC)^2]^{\frac{1}{2}}}{(A^2+B^2+C^2)\,ds}.$$

Cela posé, nommons Δ le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \theta' \\ \varphi'' & \psi'' & \theta'' \\ \varphi''' & \psi''' & \theta''' \end{vmatrix},$$

et employons ces identités connues par la théorie des déterminants, et qui se vérifient d'ailleurs immédiatement, savoir

$$\begin{aligned} A\,dB-B\,dA&=\Delta\theta'\,dt,\\ B\,dC-C\,dB&=\Delta\varphi'\,dt,\\ C\,dA-A\,dC&=\Delta\psi'\,dt, \end{aligned}$$

on en conclura immédiatement

$$\frac{1}{r}=\frac{\Delta\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2}\,dt}{(A^2+B^2+C^2)\,ds}=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

C'est le résultat cherché, et qui donne en fonction de la variable t le rayon de torsion. En le rapprochant du rayon de courbure, savoir

$$\frac{1}{R^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2)^3},$$

nous en tirerons la relation

$$\frac{1}{R^2 r}=\frac{\Delta}{(\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2)^3}.$$

Prenant donc, pour la variable t laissée quelconque jusqu'ici, l'arc de la courbe, de sorte que

$$\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2=1,$$

$R^2 r$ sera le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} \varphi'(s) & \psi'(s) & \theta'(s) \\ \varphi''(s) & \psi''(s) & \theta''(s) \\ \varphi'''(s) & \psi'''(s) & \theta'''(s) \end{vmatrix},$$

déjà considéré à propos de la sphère osculatrice, et qu'il convient de transformer de la manière suivante.

III. Posons pour un instant

$$G = \varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2, \quad H = \varphi''\varphi''' + \psi''\psi''' + \theta''\theta''',$$
$$G' = \varphi''^2 + \psi''^2 + \theta''^2, \quad H' = \varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''',$$
$$G'' = \varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2, \quad H'' = \varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'';$$

on sait que le déterminant symétrique par rapport à la diagonale

$$\begin{vmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{vmatrix} = GG'G'' + 2HH'H'' - GH^2 - G'H'^2 - G''H''^2$$

sera précisément le carré de Δ. Or on a d'abord

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 = G = 1,$$

d'où, en différentiant par rapport à s,

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'' = H'' = 0.$$

En second lieu

$$\varphi''^2 + \psi''^2 + \theta''^2 = G' = \frac{1}{R^2},$$

et, en différentiant de nouveau, on obtient

$$\varphi''\varphi''' + \psi''\psi''' + \theta''\theta''' = H = -\frac{R'}{R^3}.$$

Enfin l'équation

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'' = 0$$

donne

$$\varphi''^2 + \psi''^2 + \theta''^2 + \varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''' = 0,$$

et il en résulte

$$\varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''' = H' = -\frac{1}{R^2}.$$

De là suit la relation que nous voulions obtenir, savoir

$$\Delta^2 = \frac{1}{R^4 r^2} = \frac{\varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2}{R^2} - \frac{1}{R^6} - \frac{R'^2}{R^6},$$

et qui a d'importantes conséquences.

La première, c'est que le rayon de torsion se trouve

exprimé au moyen du rayon de courbure et de la somme

$$\varphi'''^2(s) + \psi'''^2(s) + \theta'''^2(s),$$

par la formule

$$\frac{1}{r^2} = R^2(\varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2) - \frac{1 + R'^2}{R^2}.$$

Nous en conclurons que les coordonnées d'une courbe quelconque dans l'espace étant, en fonction de l'arc,

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s),$$

on a les trois équations

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + \theta'^2(s) = 1,$$

$$\varphi''^2(s) + \psi''^2(s) + \theta''^2(s) = \frac{1}{R^2},$$

$$\varphi'''^2(s) + \psi'''^2(s) + \theta'''^2(s) = \frac{1}{R^2 r^2} + \frac{1 + R'^2}{R^4},$$

qui déterminent ces coordonnées lorsqu'on donne R et r, ainsi qu'on le verra dans le calcul intégral. J'y joindrai celles-ci, qui s'en tirent par des différentiations, savoir

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \theta'\theta'' = 0,$$

$$\varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''' = -\frac{1}{R^2},$$

$$\varphi''\varphi''' + \psi''\psi''' + \theta''\theta''' = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\right)',$$

$$\varphi'\varphi^{\text{iv}} + \psi'\psi^{\text{iv}} + \theta'\theta^{\text{iv}} = -\frac{3}{R}\left(\frac{1}{R}\right)',$$

$$\varphi''\varphi^{\text{iv}} + \psi''\psi^{\text{iv}} + \theta''\theta^{\text{iv}} = -\frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^2 r^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\right)'',$$

$$\varphi'\varphi^{\text{v}} + \psi'\psi^{\text{v}} + \theta'\theta^{\text{v}} = \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^2 r^2} - 3\left(\frac{1}{R}\right)'^2 - \frac{4}{R}\left(\frac{1}{R}\right)''.$$

La seconde conséquence concerne le rayon de la sphère osculatrice à cette courbe. En le désignant par ρ, nous avons obtenu, page 135, l'expression

$$\rho^2\Delta^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2)(\varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2) - (\varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta''')^2.$$

Or, il suffira d'y remplacer Δ par $\frac{1}{\mathrm{R}^2 r}$, et les quantités $\varphi'''^2 + \psi'''^2 + \theta'''^2$, $\varphi'\varphi''' + \psi'\psi''' + \theta'\theta'''$ par les valeurs qui viennent d'être obtenues, pour en conclure cette relation simple et remarquable, savoir

$$\rho^2 = \mathrm{R}^2 + r^2\mathrm{R}'^2.$$

IV. Les expressions du rayon de courbure et du rayon de torsion nous serviront encore à démontrer les théorèmes suivants, qui sont dus à M. Bonnet :

La distance d'une des extrémités d'un arc infiniment petit au plan osculateur correspondant à l'autre extrémité a pour valeur le cube de cet arc divisé par six fois le produit de ses rayons de courbure et de torsion.

La plus courte distance des tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit est égale au cube de l'arc divisé par douze fois le même produit.

Effectivement, l'équation du plan osculateur en un point de la courbe

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s)$$

étant

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - \varphi) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - \psi) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - \theta) = 0,$$

la distance à ce plan du point correspondant à l'arc $s + h$ sera en valeur absolue

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{A}[\varphi(s+h) - \varphi(s)] + \mathrm{B}[\psi(s+h) - \psi(s)] + \mathrm{C}[\theta(s+h) - \theta(s)]}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}.$$

Or, en développant en série le numérateur, on sait d'avance que les termes en h et h^2 disparaîtront, ce qui se vérifie d'ailleurs immédiatement, car ils ont pour facteurs les quantités

$$\mathrm{A}\varphi' + \mathrm{B}\psi' + \mathrm{C}\theta', \quad \mathrm{A}\varphi'' + \mathrm{B}\psi'' + \mathrm{C}\theta'',$$

c'est-à-dire les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi' & \varphi'' \\ \psi' & \psi' & \psi'' \\ \theta' & \theta' & \theta'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi'' \\ \psi' & \psi'' & \psi'' \\ \theta' & \theta'' & \theta'' \end{vmatrix},$$

où deux colonnes coïncident; et de plus le terme $\frac{h^3}{6}$ sera multiplié par la quantité

$$A\varphi''' + B\psi''' + C\theta''' = \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \\ \theta' & \theta'' & \theta''' \end{vmatrix},$$

ce qui nous conduit précisément au déterminant $\Delta = \frac{1}{R^2 r}$. Ayant d'ailleurs

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

nous parvenons sur-le-champ à l'expression cherchée

$$D = \frac{h^3}{6Rr}.$$

Pour établir le second théorème, je rappelle qu'en général la plus courte distance δ des droites

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c},$$

$$\frac{X - x'}{a'} = \frac{Y - y'}{b'} = \frac{Z - z'}{c'}$$

est donnée par la formule

$$\delta = \frac{N}{[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2]^{\frac{1}{2}}},$$

où le numérateur est, en valeur absolue, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & x - x' \\ b & b' & y - y' \\ c & c' & z - z' \end{vmatrix}.$$

Or, en considérant de nouveau les points de la courbe qui correspondent aux arcs s et $s + h$, les droites deviendront les tangentes en ces points, si l'on fait

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s),$$
$$a = \varphi'(s), \quad b = \psi'(s), \quad c = \theta'(s),$$

et ensuite

$$x' = \varphi(s+h),\quad y' = \psi(s+h),\quad z' = \theta(s+h),$$
$$a' = \varphi'(s+h),\quad b' = \psi'(s+h),\quad c' = \theta'(s+h).$$

Développant en série, suivant les puissances de h, on obtiendra d'abord

$$bc' - cb' = \psi'\theta'(s+h) - \theta'\psi'(s+h) = -\mathrm{A}h + \ldots,$$
$$ca' - ac' = \theta'\varphi'(s+h) - \varphi'\theta'(s+h) = -\mathrm{B}h + \ldots,$$
$$ab' - ba' = \varphi'\psi'(s+h) - \psi'\varphi'(s+h) = -\mathrm{C}h + \ldots,$$

d'où résulte, pour le dénominateur de δ, en négligeant le carré de h,

$$[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2]^{\frac{1}{2}} = h(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{\mathrm{R}}.$$

Pour évaluer ensuite le numérateur, remarquons qu'on a identiquement, d'après les propriétés élémentaires des déterminants,

$$\begin{vmatrix} a & a' & x - x' \\ b & b' & y - y' \\ c & c' & z - z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' - a & \frac{a + a'}{2}h + x - x' \\ b & b' - b & \frac{b + b'}{2}h + y - y' \\ c & c' - c & \frac{c + c'}{2}h + z - z' \end{vmatrix},$$

et si l'on effectue, dans les deux dernières colonnes, les développements en série, on trouvera, en employant seulement le premier terme de chaque développement,

$$\mathrm{N} = \begin{vmatrix} \varphi' & h\varphi'' & \frac{1}{12}h^3\varphi''' \\ \psi' & h\psi'' & \frac{1}{12}h^3\psi''' \\ \theta' & h\theta'' & \frac{1}{12}h^3\theta''' \end{vmatrix} = \frac{h^4}{12}\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \\ \theta' & \theta'' & \theta''' \end{vmatrix}.$$

Nous sommes donc encore ramenés comme tout à l'heure au déterminant $\Delta = \frac{1}{\mathrm{R}^2 r}$; il en résulte

$$\mathrm{N} = \frac{h^4}{12\mathrm{R}^2 r},$$

et, par conséquent,

$$\delta = \frac{h^3}{12 R r},$$

ce qui démontre le second théorème (*).

V. Voici encore des résultats analogues aux précédents. Soient U, V et W les angles des tangentes, des plans osculateurs et des deux normales principales aux extrémités des arcs s et $s+h$; R et r désignant comme tout à l'heure les rayons de courbure et de torsion à l'extrémité de l'arc s, on aura

$$U = \int_s^{s+h} \frac{ds}{R} - \frac{h^3}{24 R r^2},$$

$$V = \int_s^{s+h} \frac{ds}{r} - \frac{h^3}{24}\left[\frac{1}{R^2 r} + R^2 r \frac{d^2 (R r)^{-2}}{ds^2}\right],$$

$$W = \int_s^{s+h} ds \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}} - \frac{h^3}{24} \frac{r^3 \left(\frac{R}{r}\right)''}{R (R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en négligeant les puissances de h supérieures à la troisième. Dans le cas des courbes planes, la première équation devient

$$U = \int_s^{s+h} \frac{ds}{R}$$

pour toute valeur de h. De même, en considérant la distance p de l'extrémité de l'arc $s+h$ à la tangente à l'extrémité de l'arc s, l'expression

$$\sin U - \frac{dp}{dh},$$

identiquement nulle à l'égard des lignes planes, sera, pour les courbes gauches, infiniment petite du troisième ordre par rapport à h, et l'on devra poser alors

$$\sin U - \frac{dp}{dh} = \frac{h^3}{72 R r^2}$$

aux infiniment petits près du quatrième ordre.

(*) Voyez, pour la démonstration géométrique, le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. BERTRAND, t. I, p. 638.

VI. Après avoir exposé, en général, ce qui concerne les notions géométriques nouvelles de la courbure et de la torsion, nous allons faire une application particulière des formules obtenues, en considérant l'hélice. On nomme ainsi la courbe obtenue lorsqu'on enroule le plan d'un angle sur un cylindre quelconque, de manière que l'un des côtés s'applique exactement sur la section droite.

Prenant donc le plan de cette section pour plan des xy, il est clair que l'ordonnée z d'un point quelconque de l'hélice sera proportionnelle à l'arc s de la base du cylindre, compté à partir du sommet de l'angle. Nous obtiendrons ainsi ses équations, en joignant à la relation

$$z = ms$$

les expressions, en fonction de l'arc, des coordonnées x et y de cette base, à savoir

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s).$$

L'arc de cette courbe, que je désignerai par σ, s'obtiendra donc par la relation

$$d\sigma^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + m^2)\,ds^2 = (1 + m^2)\,ds^2,$$

qui donne

$$d\sigma = \sqrt{1 + m^2}\,ds,$$

d'où résulte que l'on forme aisément les dérivées prises par rapport à σ de toute fonction de s, $u = f(s)$. Nous aurons, en effet,

$$\frac{du}{d\sigma} = f'(s)\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} f'(s),$$

et, par suite,

$$\frac{d^2u}{d\sigma^2} = \frac{f''(s)}{1 + m^2},$$

$$\frac{d^3u}{d\sigma^3} = \frac{f'''(s)}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous calculerons, d'après cela, les rayons de courbure et

de torsion de l'hélice, donnés en général par les formules

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{R^2 r} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\sigma} & \frac{d^2x}{d\sigma^2} & \frac{d^3x}{d\sigma^3} \\ \frac{dy}{d\sigma} & \frac{d^2y}{d\sigma^2} & \frac{d^3y}{d\sigma^3} \\ \frac{dz}{d\sigma} & \frac{d^2z}{d\sigma^2} & \frac{d^2z}{d\sigma^3} \end{vmatrix},$$

en écrivant

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{(1+m^2)^2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right],$$

$$\frac{1}{R^2 r} = \frac{1}{(1+m^2)^3}\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

Il viendra ainsi

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\varphi''^2 + \psi''^2}{(1+m^2)^2},$$

$$\frac{1}{R^2 r} = \frac{1}{(1+m^2)^3}\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{m(\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'')}{(1+m^2)^3}.$$

Or, en désignant par $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure de la section droite qui a pour équations

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

on aura d'abord

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^2} = \varphi''^2 + \psi''^2,$$

et ensuite, comme nous l'avons établi page 156,

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^3} = \varphi''\psi''' - \psi''\varphi'''.$$

On peut donc écrire

$$R^2 = (1+m^2)^2\mathfrak{R}^2, \quad R^2 r = \frac{(1+m^2)^3}{m}\mathfrak{R}^3,$$

d'où

$$R = (1+m^2)\mathcal{R}, \quad r = \frac{1+m^2}{m}\mathcal{R},$$

et il en résulte ce théorème :

En des points placés sur une même génératrice, la courbure et la torsion de l'hélice sont l'une et l'autre dans un rapport constant avec la courbure de la base du cylindre.

Remarquons aussi les valeurs des coefficients de l'équation du plan osculateur, à savoir

$$A = \frac{m\psi''}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{-m\varphi''}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Au moyen des relations, p. 156,

$$\varphi'' = -\frac{\psi'}{\mathcal{R}}, \quad \psi'' = \frac{\varphi'}{\mathcal{R}},$$

elles deviennent

$$A = \frac{m\varphi'}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}},$$

$$B = \frac{m\psi'}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}},$$

$$C = -\frac{1}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}\mathcal{R}},$$

et l'équation du plan prend cette forme simple

$$\frac{Z-z}{m} = (X-x)\varphi' + (Y-y)\psi',$$

où l'on reconnaît qu'il contient la droite

$$Z = z, \quad (X-x)\varphi' + (Y-y)\psi' = 0;$$

mais la seconde relation représente la normale à la base du cylindre, cette droite n'est autre, par conséquent, que la nor-

12.

male même de la surface au point

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

En dernier lieu, voici les coordonnées du centre du cercle osculateur et du centre de la sphère osculatrice; les premières ont été obtenues, p. 156, sous cette forme

$$\alpha = x + R^2 \frac{d^2x}{d\sigma^2}, \quad \beta = y + R^2 \frac{d^2y}{d\sigma^2}, \quad \gamma = z + R^2 \frac{d^2z}{d\sigma^2},$$

et un calcul facile donne pour résultat

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi(s) - \mathcal{R}(1 + m^2)\psi'(s), \\ \beta &= \psi(s) + \mathcal{R}(1 + m^2)\varphi'(s), \\ \gamma &= ms. \end{aligned}$$

Quant aux secondes, on voit aisément que les relations de la page 135 peuvent être écrites de cette manière

$$a = \alpha - rRR'A, \quad b = \beta - rRR'B, \quad c = \gamma - rRR'C,$$

et l'on en tire immédiatement les valeurs

$$\begin{aligned} a &= \varphi(s) - \mathcal{R}(1 + m^2)\psi'(s) - \mathcal{R}\mathcal{R}'(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}\varphi'(s), \\ b &= \psi(s) + \mathcal{R}(1 + m^2)\varphi'(s) - \mathcal{R}\mathcal{R}'(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}\psi'(s), \\ c &= ms + \mathcal{R}\mathcal{R}'\frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{m}. \end{aligned}$$

VII. En appliquant ces formules au cas particulier d'un cylindre droit à base circulaire, elles montrent immédiatement que $\mathcal{R}$ étant constant, la courbure et la torsion de l'hélice seront elles-mêmes constantes. Mais si l'on désigne par ρ le rayon du cylindre, les équations de la courbe étant alors

$$x = \rho \cos \frac{s}{\rho}, \quad y = \rho \sin \frac{s}{\rho}, \quad z = ms,$$

cette conclusion était évidente *à priori*. Posons en effet, en remplaçant s par $\alpha + s$,

$$x' = \rho \cos \frac{\alpha + s}{\rho}, \quad y' = \rho \sin \frac{\alpha + s}{\rho}, \quad z' = m(\alpha + s),$$

on trouvera aisément ces relations

$$x' = x\cos\frac{\alpha}{\rho} - y\sin\frac{\alpha}{\rho},$$

$$y' = x\sin\frac{\alpha}{\rho} + y\cos\frac{\alpha}{\rho},$$

$$z' = m\alpha + z.$$

Elles montrent qu'un changement d'axes ferait coïncider x', y', z' avec x, y, z; par conséquent, les fonctions des coordonnées qui conservent leur valeur quand on change les axes, et qui tiennent ainsi à la nature et non à la position de la courbe, sont constantes pour tous les points de l'hélice.

Une autre conséquence de la supposition de $\mathcal{R}$ constant, c'est qu'alors le centre du cercle osculateur et le centre de la sphère osculatrice coïncident, leurs coordonnées étant, d'après les formules précédentes,

$$\alpha = -m^2\rho\cos\frac{s}{\rho}, \quad \beta = -m^2\rho\sin\frac{s}{\rho}, \quad \gamma = ms.$$

Le lieu de ces points est donc une hélice semblable à la proposée.

SURFACES.

I. En considérant sur une surface les sections obtenues par les plans qui passent par la normale en un point donné, leurs rayons de courbure en ce point varient suivant des lois simples dont la découverte, due à Euler, a servi de fondement à la théorie qui va nous occuper. Pour les établir, nous rapporterons à cette normale comme axe des z, et à des droites rectangulaires situées dans le plan tangent au point considéré, l'équation de la surface proposée.

De ce choix de coordonnées résulte, comme la remarque en a déjà été faite, que l'ordonnée z développée suivant les puissances de x et de y, par la série de Maclaurin, a cette forme :

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3 + \ldots.$$

Les théorèmes que nous allons démontrer supposent donc la possibilité d'un tel développement, au moins pour des valeurs infiniment petites de x et de y, et se trouveraient complétement en défaut en considérant, par exemple, la surface donnée par l'équation

$$z = (x^2 + y^2) f\left(\frac{x}{y}\right),$$

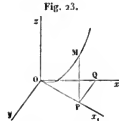
l'ordonnée z ne pouvant alors s'exprimer de cette manière (*).

Cette remarque faite, nous procéderons comme il suit. Coupons la surface par un plan normal quelconque

$$y = x \operatorname{tang} \alpha,$$

et rapportons la courbe d'intersection à deux axes situés dans son plan, l'un étant la trace Ox_1 (*fig.* 23) du plan sécant sur le plan des xy, et l'autre l'axe des z. On aura évidemment, en nommant x_1 l'abscisse OP d'un point quelconque M de cette courbe,

Fig. 23.



$$OQ = x = x_1 \cos \alpha,$$
$$PQ = y = x_1 \sin \alpha.$$

Quant à l'ordonnée MP, ce sera précisément le z de la surface, de sorte que la section aura pour équation dans son plan

$$z = (a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha) x_1^2 + d \cos^3 \alpha\, x_1^3 + \ldots,$$

les termes non écrits contenant des puissances de x_1 dont l'exposant est supérieur à 2.

Or il est aisé de voir que le rayon de courbure à l'origine a pour valeur

$$R = \frac{1}{2(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha)},$$

car, en supposant en général

$$y = Ax^2 + Bx^3 + \ldots,$$

(*) SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 472.

la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

donne bien

$$R = \frac{1}{2A}$$

pour $x = 0$; et voici les importantes conséquences qui résultent de cette expression.

Considérons l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1,$$

qui appartient à une courbe du second degré rapportée à son centre; en prenant ce centre pour origine des coordonnées polaires, et faisant

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\sin\alpha,$$

on aura

$$\rho^2(a\cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha + c\sin^2\alpha) = 1,$$

et, par conséquent,

$$\rho^2 = 2R.$$

Les rayons de courbure des sections normales, correspondant aux directions du plan sécant déterminées par l'angle α, varient donc proportionnellement aux carrés des rayons vecteurs de cette courbe, qui a reçu le nom d'*indicatrice*. Il en résulte qu'en un point d'une surface quelconque, il existe toujours deux plans normaux rectangulaires dirigés suivant les axes de l'indicatrice et donnant des sections dont la courbure est la plus grande et la plus petite possible. On les nomme *sections principales* de la surface au point considéré. Faisant ensuite application des propriétés élémentaires des rayons vecteurs menés du centre à un point d'une courbe du second degré, on a ce théorème : *La somme des inverses des rayons de courbure de deux sections rectangulaires quelconques est constante et égale à la somme des inverses des rayons de courbure des sections principales.*

La notion de l'indicatrice qui donne si aisément ces résul-

tats, découverts par Euler, est due à M. Charles Dupin, et a été présentée par ce savant illustre de la manière suivante.

Considérons la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent $z = h$, en supposant h infiniment petit, section qui se projettera en véritable grandeur sur le plan des xy et aura pour équation

$$h = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \ldots.$$

En remplaçant les coordonnées x et y par $x\sqrt{h}$, $y\sqrt{h}$, on obtiendra une courbe semblable :

$$h = (ax^2 + bxy + cy^2)h + (dx^3 + ex^2y + \ldots)h\sqrt{h} + \ldots,$$

ou bien

$$1 = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3\sqrt{h} + \ldots,$$

dont la limite, pour h infiniment petit, donne précisément

$$1 = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Je n'exposerai point ici les beaux résultats déduits de la considération de l'indicatrice par M. Charles Dupin, et je remarquerai seulement que si l'on eût opéré de même à l'égard de la section par le plan $z = -h$, en remplaçant encore x et y par $x\sqrt{h}$ et $y\sqrt{h}$, le résultat eût été évidemment

$$-1 = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Par conséquent, lorsque l'indicatrice est une ellipse, l'une des deux équations représentant une courbe réelle et l'autre une courbe imaginaire, on a cette conclusion, que la surface est tout entière au-dessus ou au-dessous du plan tangent, dans le voisinage du point de contact. Si l'indicatrice est une hyperbole, les deux courbes sont réelles, et la surface située en partie au-dessus et en partie au-dessous du plan tangent le traverse nécessairement.

La théorie de la courbure des surfaces comprend encore la détermination de la courbure d'une section oblique, mais je me bornerai à cet égard à énoncer le théorème suivant, dû à Meusnier, que *le rayon de courbe d'une section oblique est égal au rayon de courbure de la section normale qui a même*

tangente, multiplié par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux sections.

II. On nomme *ligne de courbure* d'une surface le lieu des points tels, que les normales infiniment voisins se rencontrent; condition qui s'exprime par le calcul de la manière suivante.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface proposée; en faisant

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

on aura, pour la normale au point (x, y, z),

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

ou, pour abréger,

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Cela étant, la normale infiniment voisine, au point dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, aura pour équations

$$P + dP = 0, \quad Q + dQ = 0,$$

dP et dQ désignant, par rapport aux variables indépendantes x et y, des différentielles totales qui se présentent en cette circonstance pour la première fois. Cela posé, la condition d'intersection s'obtiendra en exprimant que les équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$
$$dP = 0, \quad dQ = 0$$

ont une solution commune en X, Y, Z; mais les deux dernières, savoir

$$dx + p\,dz - dp(Z - z) = 0,$$
$$dy + q\,dz - dq(Z - z) = 0,$$

ne contenant que z, donnent immédiatement, par l'élimination,

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Et, si l'on remplace les différentielles totales dz, dp, dq par

leurs valeurs

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = pdx + qdy,$$

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy = rdx + sdy,$$

$$dq = \frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy = sdx + tdy,$$

la condition ne contenant plus que x, y et $\frac{dy}{dx}$, savoir

$$\frac{1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}}{r + s\frac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1 + q^2)\frac{dy}{dx}}{s + t\frac{dy}{dx}},$$

donne l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. Cette équation est du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$; il s'ensuit qu'ayant mené une normale par un point quelconque d'une surface, on peut toujours, dans deux directions différentes, passer de ce point à un autre infiniment voisin, pour lequel la normale soit dans un même plan avec la première. Je vais maintenant prouver que ces directions coïncident avec celles des sections principales au point considéré. Supposons, en effet, que les axes coordonnés, dont la position est restée arbitraire, soient ceux dont il a été fait usage tout à l'heure, à savoir la normale en un point de la surface, et deux droites rectangulaires dans le plan tangent en ce point; le développement en série suivant les puissances de x et y de l'ordonnée sera

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + \ldots,$$

de sorte qu'on aura, pour $x = 0$ et $y = 0$,

$$p = 0, \quad q = 0,$$

$$r = 2a, \quad s = b, \quad t = 2c.$$

Il en résulte qu'à l'origine des coordonnées, les valeurs de

$\frac{dy}{dx}$ dépendent de l'équation

$$\frac{1}{2a + b\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{b + 2c\frac{dy}{dx}},$$

ou bien

$$b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(a - c)\frac{dy}{dx} - b = 0,$$

qui a précisément pour racines les tangentes des angles des axes de l'indicatrice

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

avec l'axe des abscisses. Tout point de la surface pouvant devenir, par un changement d'axes, l'origine des coordonnées, on voit que la conclusion précédente est générale, et que la proposition annoncée est démontrée.

Ce qui précède conduit encore à cette importante conclusion, que l'équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$ a toujours ses racines réelles et ne peut les avoir égales sans être identique, de sorte qu'alors la direction des lignes de courbure devient indéterminée. Pour le reconnaître directement, posons, en introduisant une inconnue auxiliaire ρ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}}{r + s\frac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1 + q^2)\frac{dy}{dx}}{s + t\frac{dy}{dx}},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}(\rho pq - s) + [\rho(1 + p^2) - r] = 0,$$

$$\frac{dy}{dx}[\rho(1 + q^2) - t] + (\rho pq - s) = 0,$$

et, par conséquent,

$$[\rho(1 + p^2) - r][\rho(1 + q^2) - t] - (\rho pq - s)^2 = 0,$$

pour l'équation relative à ρ. Or le premier membre est négatif quand on y fait

$$\rho = \frac{r}{1 + p^2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{t}{1 + q^2};$$

d'ailleurs, le coefficient de ρ^2 étant

$$(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2=1+p^2+q^2,$$

il est positif pour $\rho=\pm\infty$, de sorte que les racines de l'équation du second degré sont réelles et séparées par les expressions $\frac{r}{1+p^2}$ et $\frac{t}{1+q^2}$. Elles ne peuvent donc devenir égales entre elles, qu'en prenant pour valeur commune

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2};$$

d'où la double égalité

$$\frac{s}{pq}=\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2},$$

qui rend en effet identique l'équation en $\frac{dy}{dx}$. Les points de la surface proposée, dont les coordonnées vérifient ces relations, se nomment *ombilics*, et on les caractérise encore en disant que l'indicatrice qui leur correspond se réduit à un cercle. On a déjà rencontré ces mêmes équations, p. 147, dans la théorie du contact, et nous savons par cette théorie qu'on peut, en chacun de ces points, obtenir une sphère osculatrice ayant avec la surface un contact du second ordre. Pour compléter ce rapprochement, revenons un instant aux axes coordonnés par rapport auxquels on a cette expression de z, savoir

$$z=ax^2+bxy+cy^2+dy^3+ex^2y+\ldots.$$

En supposant l'origine un ombilic, la sphère osculatrice tangente en ce point au plan des xy, et dont le centre sera, par suite, sur l'axe des z, aura évidemment pour équation

$$X^2+Y^2+(Z-R)^2=R^2,$$

d'où, en faisant

$$X=x,\quad Y=y,$$

cette valeur

$$Z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

où je prends le radical avec le signe —, afin qu'on ait $Z=0$, en supposant x et y nuls. Cela posé, les conditions du contact du second ordre à l'origine sont que les développements des

deux ordonnées Z et z, suivant les puissances de x et y, aient le même terme constant et les mêmes termes du premier et du second degré. Or, ayant

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = R - \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8R^3} - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$Z = \frac{x^2 + y^2}{2R} + \ldots,$$

on doit poser

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2).$$

Nous retrouvons donc la conclusion obtenue par des considérations d'origine si différente, que l'indicatrice relative aux ombilics est un cercle. Maintenant on reconnaît de suite qu'ils existent sur l'ellipsoïde, et sont les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires, car les sections des surfaces du second ordre par des plans parallèles étant des courbes semblables, l'indicatrice en chaque point est l'une quelconque des sections parallèles au plan tangent en ce point.

III. Monge a découvert le premier que les projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde sont des ellipses ou des hyperboles, par l'analyse que voici. Considérant l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on en tire d'abord

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = \frac{c^4(y^2 - b^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = \frac{c^4(x^2 - a^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

de sorte qu'en faisant pour abréger

$$A = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

il vient pour l'équation différentielle de la projection

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

On en déduit, par la différentiation, ce résultat

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2-B\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

et, éliminant entre les deux relations la quantité x^2-Ay^2-B, on arrive à cette relation très-simple

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0.$$

Divisant par $xy\dfrac{dy}{dx}$, elle devient

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{dy}{dx}}+\frac{\dfrac{dy}{dx}}{y}-\frac{1}{x}=0.$$

Les trois termes étant des dérivées exactes, on en tire immédiatement, en désignant par C une constante,

$$\log\frac{1}{C}\frac{dy}{dx}+\log y-\log x=0,$$

d'où

$$\frac{1}{C}\frac{y\,dy}{dx}=x,$$

et par conséquent

$$y^2=Cx^2+C'.$$

Telle est donc la forme dans laquelle est contenue la relation cherchée; et, en effet, si l'on substitue dans l'équation proposée la valeur de y, on voit qu'elle est identiquement vérifiée en posant $C'=-\dfrac{BC}{1+AC}$. La combinaison analytique qui a conduit au résultat n'est justifiée que par le succès; il semble en effet difficile de voir de quelle manière Monge y a été conduit, l'exposition de sa méthode commençant par ces mots, singulièrement obscurs : « Cette équation étant élevée, on doit la regarder comme résultant de rapports non linéaires établis entre les constantes qui complétaient les intégrales du premier ordre d'une équation différentielle d'un ordre supérieur. » (*Application de l'Analyse à la Géométrie*, p. 142.)

COURBES ET SURFACES ENVELOPPES.

I. Une courbe étant donnée par une équation renfermant un paramètre a, savoir

$$f(x, y, a) = 0,$$

le lieu des intersections successives de chacune de ces courbes avec celle qui correspond à une valeur infiniment voisine du paramètre est nommé l'*enveloppe* de la proposée.

Son équation s'obtiendra donc en éliminant la variable a entre les deux relations

$$f(x, y, a) = 0,$$
$$f(x, y, a + da) = 0.$$

Mais on commencera par introduire la supposition de da infiniment petit, avant d'effectuer l'élimination, en remplaçant le système des relations proposées par celui-ci

$$f(x, y, a) = 0,$$
$$\frac{f(x, y, a + da) - f(x, y, a)}{da} = 0,$$

dont la seconde donne immédiatement, dans la supposition faite,

$$\frac{df(x, y, a)}{da} = 0.$$

Cela posé, concevons que l'on en tire

$$a = \varphi(x, y),$$

l'équation de l'enveloppe se trouvera représentée par

$$f[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

et il sera facile de conclure de là que l'enveloppe est tangente à chacune des *enveloppées*, en nommant ainsi les courbes $f(x, y, a) = 0$.

En effet, on trouve en différentiant

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Mais $\frac{df}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{df}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x, y)$ y remplace a, et $\varphi(x, y)$ est précisément la valeur de a qui annule $\frac{df}{da}$; donc $\frac{df}{d\varphi}$ s'évanouit identiquement, et il reste

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

C'est précisément la relation qui déterminerait le coefficient angulaire de la tangente à la courbe enveloppée; on en conclut que les deux courbes ayant même tangente en leur point commun sont tangentes entre elles.

II. La règle précédemment donnée pour la détermination des courbes enveloppes conduit à un paradoxe, si on l'applique à l'équation résolue par rapport au paramètre a, car la dérivée égalée à zéro donne la relation absurde $1=0$. Soit, pour fixer les idées, le cercle (*)

$$(x-a)^2+y^2=R^2,$$

d'où l'on tire

$$a=x\pm\sqrt{R^2-y^2}.$$

En prenant pour courbes infiniment voisines

$$a=x+\sqrt{R^2-y^2},$$
$$a+da=x+\sqrt{R^2-y^2},$$

on voit effectivement qu'elles ne peuvent se rencontrer, d'où l'équation contradictoire $1=0$; mais la conclusion à tirer de là, c'est que l'on doit chercher le point de rencontre de ces deux autres courbes

$$a=x+\sqrt{R^2-y^2},$$
$$a+da=x-\sqrt{R^2-y^2},$$

(*) SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 308.

qui correspondent à deux déterminations différentes du radical. Or on obtient ainsi pour résultat $y^2 - R^2 = 0$, comme par l'application de la règle à l'équation non résolue

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2.$$

III. Soit proposé de déterminer l'enveloppe de la droite

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha),$$

où le paramètre variable est l'angle α que fait cette droite avec l'axe des abscisses. La dérivée par rapport à α donne

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha),$$

et en résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on exprimera en fonction du paramètre variable les coordonnées d'un point de l'enveloppe, qui seront

$$x = f'(\alpha)\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha,$$
$$y = f'(\alpha)\sin\alpha - f(\alpha)\cos\alpha.$$

Ces valeurs conduisent à une conséquence remarquable pour l'arc de cette courbe. On trouve en effet

$$dx = [f''(\alpha) + f(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = [f''(\alpha) + f(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha,$$

ce qui donne d'abord, pour le coefficient angulaire de la tangente,

$$\frac{dy}{dx} = \tang\alpha,$$

comme on devait s'y attendre, la droite mobile que nous savons être tangente à son enveloppe faisant avec l'axe des abscisses l'angle α. Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est qu'en faisant la somme des carrés, on trouve

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = [f''(\alpha) + f(\alpha)]^2 d\alpha^2,$$

d'où, par conséquent,

$$ds = \pm [f''(\alpha) + f(\alpha)]\, d\alpha,$$

le double signe devant être déterminé de manière que ds soit positif ou négatif, suivant que s croît ou décroît avec α. On

voit ainsi qu'on obtient pour ds une expression sans radical et conduisant à une infinité de courbes rectifiables, puisqu'en prenant pour $f(\alpha)$ la dérivée d'une fonction connue, on aura immédiatement l'expression de l'arc s en α.

Soit, par exemple,

$$f(\alpha) = -a \sin\alpha \cos\alpha;$$

l'équation de la droite

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = -a \sin\alpha \cos\alpha,$$

écrite ainsi

$$\frac{x}{a \cos\alpha} - \frac{y}{a \sin\alpha} = -1,$$

montre que les segments interceptés sur les axes coordonnés sont les projections sur ces axes de la constante a. La courbe que nous allons rectifier est donc l'enveloppe d'une droite de grandeur a qui se meut en s'appuyant sur les axes coordonnés, et l'on aura d'abord, pour les coordonnées d'un point M (*fig.* 24),

Fig. 24.

$$x = -a \cos^3\alpha,$$
$$y = a \sin^3\alpha,$$

d'où, pour les longueurs des segments MP, MQ, interceptés par les axes sur la tangente en ce point,

$$\text{MP} = a \cos^2\alpha, \quad \text{MQ} = a \sin^2\alpha,$$

et enfin pour l'équation en coordonnées rectangulaires

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Quant à la différentielle de l'arc, on obtient

$$ds = \pm 3a \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha,$$

et en considérant la portion de courbe commençant au point A, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et qui s'étend dans l'angle des coordonnées positives, jusqu'à la limite $\alpha = \pi$, nous choisirons le signe $-$,

puisque $\cos\alpha$ est négatif dans cet intervalle. De cette manière, s croîtra avec α, depuis la valeur zéro relative au point A, et l'on aura, d'après la notion déjà acquise de l'intégrale définie,

$$s = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} 3a \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha.$$

Mais l'expression $-\frac{3a}{2}\sin^2\alpha + C$ a pour dérivée

$$-3a \sin\alpha \cos\alpha,$$

et, en prenant $C = \frac{3a}{2}$, on voit qu'elle s'évanouira pour

$$\alpha = \frac{\pi}{2};$$

de sorte qu'elle représentera bien la somme des valeurs de la différentielle $-3a \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$, à partir de $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ainsi l'on a

$$s = \frac{3a}{2}(1 - \sin^2\alpha) = \frac{3a}{2}\cos^2\alpha,$$

résultat qui s'interprète géométriquement; car, d'après l'expression donnée plus haut du segment de tangente MP, on voit qu'on obtient simplement

$$s = \tfrac{3}{2}\text{MP}.$$

IV. Je me bornerai à quelques mots sur les surfaces enveloppes. On en distingue deux espèces : dans les unes, la surface enveloppée est définie par une équation

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

renfermant un seul paramètre variable, et la courbe d'intersection de deux surfaces infiniment voisines, correspondant aux valeurs a et $a + da$, est déterminée par les deux équations

$$f(x, y, z, a) = 0,$$
$$f(x, y, z, a + da) = 0,$$

ou, en opérant comme plus haut, par celles-ci

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

$$\frac{df(x, y, z, a)}{da} = 0.$$

Or on démontrera, par un calcul tout semblable, qu'en tirant de la seconde équation $a = \varphi(x, y, z)$, la surface enveloppe représentée par

$$f[x, y, z, \varphi(x, y, z)] = 0$$

est tangente à toutes les enveloppées. Effectivement, les deux coefficients $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ de l'équation du plan tangent sont donnés par les relations

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

qui se réduisent, à cause de $\frac{df}{d\varphi} = 0$, à

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Ces coefficients sont donc ceux qu'on obtiendrait en cherchant le plan tangent à la surface enveloppée $f(x, y, z, a) = 0$, le paramètre a ayant la valeur numérique que prend $\varphi(x, y, z)$ au point considéré.

Soit, par exemple, le plan

$$z = ax + \varphi(a)y + \psi(a).$$

La surface enveloppe résulte de l'élimination du paramètre variable entre cette équation et la suivante

$$0 = x + \varphi'(a)y + \psi'(a);$$

elle porte le nom de *surface développable*, et, en identifiant

l'équation générale du plan tangent en un point (x, y, z) quelconque,

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

avec celle-ci

$$Z = aX + \varphi(a)Y + \psi(a),$$

nous aurons

$$a = p,$$
$$\varphi(a) = q,$$
$$\psi(a) = z - px - qy.$$

On en tire immédiatement, entre les dérivées partielles du premier ordre, la relation

$$q = \varphi(p),$$

qui est d'une grande importance dans la théorie de ces surfaces; il vient ensuite, en différentiant successivement par rapport à x et y,

$$\frac{dq}{dx} = \varphi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dq}{dy} = \varphi'(p)\frac{dp}{dy},$$

ou, plus simplement,

$$s = \varphi'(p)r, \quad t = \varphi'(p)s,$$

et, par suite,

$$- s^2 rt = 0,$$

si l'on élimine $\varphi'(p)$. C'est ce qu'on nomme l'*équation aux différences partielles des surfaces développables;* elle montre qu'en chacun de leurs points, l'indicatrice

$$\tfrac{1}{2}rX^2 + sXY + \tfrac{1}{2}tY^2 = 1$$

est un système de deux droites parallèles, et il en résulte aisément que l'une des deux sections principales a un rayon de courbure infini.

La seconde espèce de surfaces enveloppes se rapporte à l'équation

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$

renfermant deux paramètres variables a et b, et s'obtient en éliminant a et b entre les trois équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{db} = 0.$$

Alors la surface obtenue par ce calcul touche encore toutes les surfaces proposées, mais chacune en un seul point, ou en un nombre fini et limité de points; car, pour des valeurs données des constantes a et b, les trois équations ci-dessus ne donnent, pour x, y, z, qu'un nombre fini de valeurs, tandis qu'on avait, dans le cas précédent, une courbe de contact.

APPLICATIONS ANALYTIQUES

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Formes indéterminées de certaines fonctions pour des valeurs particulières de la variable.

Soit $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ une fraction se réduisant à $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, de sorte que l'on ait

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0.$$

La série de Taylor, limitée à ses deux premiers termes, donnant dans ce cas

$$f(a+h) = hf'(a+\theta h),$$
$$\varphi(a+h) = h\varphi'(a+\theta_1 h),$$

où θ et θ_1 sont des quantités comprises entre zéro et l'unité, on en conclut, en faisant tendre h vers zéro,

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

La valeur cherchée est donc le rapport des dérivées des deux termes de la fonction proposée.

La démonstration précédente suppose évidemment la quantité a finie, mais on va voir que le résultat n'est point soumis à cette restriction.

Faisons, en effet, $x = \frac{1}{y}$; la fraction proposée devient $\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}$, et prend la forme indéterminée pour $y = 0$, ce qui

permet de lui appliquer la règle relative aux valeurs finies de la variable. Or on obtient de la sorte

$$\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)},$$

ce qui ramène précisément à

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Il pourrait arriver que cette nouvelle fraction se présentât de nouveau sous la forme $\frac{0}{0}$; alors on serait conduit, en appliquant la même règle, au quotient des dérivées secondes $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$, et, en continuant ainsi de proche en proche, s'il y a lieu, on obtiendra la valeur cherchée par le quotient $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$, n étant l'ordre des premières dérivées des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ qui ne s'annulent pas à la fois pour $x = a$.

Considérons maintenant le cas où les deux termes de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sont infinis lorsqu'on y fait $x = a$; on le ramène immédiatement au précédent, en écrivant

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Appliquant donc la règle, et désignant par A la limite cherchée, nous trouverons

$$A = \lim \frac{\frac{-\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)},$$

ce qui conduit à l'égalité

$$A = A^2 \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

d'où l'on conclut, quand A n'est ni nul, ni infini,

$$A = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

C'est donc encore le rapport des dérivées qui donne la valeur cherchée, et l'on va voir que la conclusion subsiste, si l'on suppose $A = 0$. Considérant en effet l'expression

$$\frac{f(x) + \alpha\varphi(x)}{\varphi(x)},$$

qui se présente aussi sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et a évidemment pour limite la constante α, on trouvera, en appliquant la règle,

$$\lim \frac{f'(x) + \alpha\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = \alpha,$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0.$$

En dernier lieu, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ devient infini pour $x = a$, la fraction inverse $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ a pour limite zéro; de sorte qu'on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \infty.$$

J'omettrai la considération de la forme indéterminée $0 \times \infty$, comme se ramenant d'elle-même aux cas précédents de $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$; de la forme $\infty - \infty$, qu'on peut rattacher à

$$\log \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \log f(x) - \log \varphi(x),$$

et enfin de celles-ci

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0,$$

car en posant

$$y = f(x)^{\varphi(x)},$$

on en conclura

$$\log y = \varphi(x) \log f(x),$$

de sorte qu'il n'y aurait, dans aucun de ces cas, de question nouvelle. Voici maintenant l'application la plus intéressante à envisager; elle concerne l'expression

$$x^n \log x,$$

qui, en supposant n positif, donne, pour $x = 0$, la forme $0 \times \infty$. Or, en l'écrivant de cette manière : $\frac{\log x}{x^{-n}}$, on sera ramené aux quotients $\frac{\infty}{\infty}$, et, en prenant le rapport des dérivées, nous trouverons

$$\frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n},$$

ce qui est nul pour $x = 0$.

Considérons encore, pour $x = 0$, l'expression $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, qui devient alors $\frac{0}{0}$. En posant

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = t,$$

d'où

$$x = (-\log t)^{-\frac{1}{2}},$$

elle se ramène à celle-ci

$$\frac{t}{(-\log t)^{-\frac{n}{2}}} = t(-\log t)^{\frac{n}{2}} = \left(-t^{\frac{2}{n}} \log t\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Or on a $t = 0$, pour $x = 0$, ce qui ramène au cas précédent, de sorte que la limite est encore zéro. Je cite cet exemple à cause de la remarque suivante de Cauchy. Formons les dérivées successives de la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

nous trouverons

$$f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} + \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6},$$

.........................,

d'où il aisé de conclure qu'en général $f^{(\mu)}(x)$ se compose d'une somme de termes de la forme $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, n étant positif; de sorte que, pour $x=0$, la fonction proposée s'annule, ainsi que ses dérivées des divers ordres. Il en résulte qu'en appliquant à cette fonction la formule de développement en série de Maclaurin, le reste seul paraîtra dans les résultats. En n'ayant donc pas égard au reste, les deux expressions

$$\mathrm{F}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

sont données exactement par la même série; d'où l'on voit combien la condition de convergence est loin d'être suffisante, comme le croyait Lagrange, pour que la série

$$\mathrm{F}(0) + \frac{x}{1}\mathrm{F}'(0) + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0) + \ldots$$

représente $\mathrm{F}(x)$.

En dernier lieu, nous observerons qu'une fraction $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$, qui, pour $x=a, y=b$, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, est essentiellement indéterminée; car la limite, pour $h=0, k=0$, de l'expression

$$\frac{f(a+h,\ b+k)}{\varphi(a+h,\ b+k)} = \frac{h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} + \ldots}{h\frac{d\varphi}{dx} + k\frac{d\varphi}{dy} + \ldots},$$

lorsque l'on aura remplacé x et y par a et b dans les coefficients de h et k, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, dépendra essentiellement du rapport $\frac{k}{h}$. Il est toutefois un cas d'exception à cette conséquence; c'est lorsque l'on suppose

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{\varphi d}{dy}}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

condition qui s'interprète immédiatement en considérant les

deux courbes $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$. En effet, ces courbes sont alors tangentes entre elles au point représenté par le système des valeurs considérées $x=a$, $y=b$.

Maxima et minima.

I. On dit qu'une fonction $f(x)$ est maximum ou minimum, pour une valeur de la variable $x=a$, lorsque la différence $f(a+h)-f(a)$ garde le même signe, h variant entre les limites $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, où ε est une quantité déterminée, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra. Le maximum correspond au cas où cette différence est négative, et le minimum au cas où elle est positive. Cela posé, on a, par la formule de Taylor,

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$$

Or, on peut prendre h assez petit pour que le terme $hf'(x)$ donne son signe au second membre; ce terme changeant de signe avec h, il en résulte que, dans le cas du maximum et du minimum, on doit avoir

$$f'(x)=0.$$

En désignant donc par $x=a$ l'une des racines de cette équation, il viendra

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h),$$

et si l'on suppose encore h suffisamment petit, le signe de la différence considéré sera déterminé par $f''(a)$; ainsi, à la valeur $x=a$ correspondra un maximum ou un minimum, suivant que

$$f''(a)<0, \quad \text{ou} \quad f''(a)>0.$$

Dans le cas où l'on aurait à la fois $f'(a)=0$ et $f''(a)=0$, la formule de Taylor donnant

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{6}f'''(a)+\ldots,$$

on voit qu'il n'existera ni maximum ni minimum, à moins que

la nouvelle condition $f'''(a) = 0$ ne soit remplie, et alors le signe de la dérivée quatrième servira, comme précédemment celui de la dérivée seconde, à distinguer le cas du maximum de celui du minimum. En continuant ainsi, on arrivera à une conclusion que l'on peut énoncer sous forme géométrique, comme il suit. Les points de la courbe $y = f(x)$ auxquels correspondent des maxima ou minima de l'ordonnée sont ceux où la tangente, étant parallèle à l'axe des abscisses, a un contact d'ordre impair avec la courbe.

II. Il peut arriver que l'on ait à déterminer les maxima et minima d'une fonction $f(x, y)$, y étant lié à x par une équation $\varphi(x, y) = 0$; on posera alors

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et l'on tirera $\frac{dy}{dx}$ de la condition

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Or une conséquence analytique à remarquer, c'est qu'en éliminant $\frac{dy}{dx}$ par la méthode du multiplicateur, on déduira de la combinaison

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} - \lambda\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

les équations

$$\frac{df}{dx} - \lambda\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} - \lambda\frac{d\varphi}{dy} = 0;$$

d'où l'énoncé suivant :

Les valeurs de x et y propres au maximum et au minimum de $f(x, y)$, sous la condition $\varphi(x, y) = 0$, s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées partielles, par rapport à x et y, de la quantité $f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du carré de la distance à l'origine des coordonnées d'un point de la courbe du second degré

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

on formera les dérivées partielles de

$$x^2+y^2-\lambda(ax^2+2bxy+cy^2-1),$$

ce qui donnera

$$x-\lambda(ax+by)=0,$$
$$y-\lambda(bx+cy)=0.$$

Multipliant maintenant la première égalité par x, la seconde par y, et ajoutant, nous trouverons

$$x^2+y^2-\lambda(ax^2+2bxy+cy^2)=0.$$

Or on voit, d'après l'équation de la courbe, que l'on a précisément $x^2+y^2=\lambda$; et cette quantité s'obtiendra évidemment en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} 1-a\lambda & -b\lambda \\ -b\lambda & 1-c\lambda \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait $\lambda=\frac{1}{s}$, on retrouve ainsi l'équation

$$(s-a)(s-c)-b^2=0,$$

comme par la Géométrie analytique.

III. Les maxima et minima d'une fonction de deux variables indépendantes $f(x, y)$ se définissent encore par la condition que la différence

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)$$

garde le même signe, quelles que soient les valeurs positives ou négatives des quantités h et k, supposées suffisamment petites. Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)$$
$$=h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2f}{dx^2}+hk\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{1}{2}k^2\frac{d^2f}{dy^2}+\ldots,$$

de sorte que, pour h et k très-petits, le signe du premier membre est donné par l'expression

$$h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}.$$

La différence ne peut donc avoir un signe invariable qu'en posant

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

Mais ce signe alors étant donné par le trinôme homogène du second degré

$$\frac{1}{2}\left(h^2\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right) = \frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{k}{h}\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{k^2}{h^2}\frac{d^2f}{dy^2}\right),$$

il sera nécessaire qu'il ne puisse, en faisant varier $\frac{k}{h}$, passer du positif au négatif. Telle est l'origine d'une condition qui n'a point son analogue dans la théorie des maxima et minima des fonctions d'une variable, savoir

$$\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 > 0.$$

En la supposant remplie, la fonction sera un maximum ou un minimum, suivant que le coefficient de h^2 ou k^2, par exemple le premier $\frac{d^2f}{dx^2}$, sera négatif ou positif.

Ces résultats s'énoncent sous forme géométrique, en considérant la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$; on peut dire en effet que les maxima et minima de l'ordonnée z correspondent aux points de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des xy, et pour lesquels l'indicatrice est du genre ellipse.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Équations différentielles ordinaires.

I. Des fonctions d'une forme compliquée conduisent souvent entre leurs dérivées à des relations simples qu'il est utile d'obtenir dans beaucoup de questions, et surtout s'il s'agit de les développer en série. Sous ce premier point de vue, nous nous occuperons de la formation des équations différentielles

en considérant d'abord l'expression suivante

$$y = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m,$$

au sujet de laquelle Lagrange fait cette remarque qu'*un des principaux avantages des fonctions dérivées est de pouvoir faire disparaître dans les équations les puissances et les radicaux* (*). Effectivement, on trouve, en prenant la dérivée logarithmique

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

d'où

$$y'^2(x^2 - 1) = m^2 y^2;$$

et, en différentiant de nouveau, il vient, après avoir supprimé le facteur y',

$$y''(x^2 - 1) + xy' - m^2 y = 0.$$

Cette relation, ne changeant point quand on y remplace m par $-m$, aura encore lieu si l'on pose

$$y = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-m} = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m,$$

et c'est de là que Lagrange a tiré une démonstration simple et facile des formules célèbres de Jean Bernoulli pour le développement de $\sin m\varphi$ et $\cos m\varphi$, suivant les puissances croissantes ou décroissantes de $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$. On a, en effet, en faisant $x = \cos\varphi$,

$$2\cos m\varphi = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m,$$
$$2\sqrt{-1}\sin m\varphi = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m,$$

d'où l'on voit que ces diverses questions si importantes dans la théorie des fonctions circulaires dépendent toutes du développement suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable, de la quantité qui satisfait à la relation

$$y''(x^2 - 1) + xy' - m^2 y = 0.$$

Il suffit d'ailleurs de changer φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$ pour introduire $\sin\varphi$

(*) *Leçons sur le Calcul des fonctions*, p. 130; 1801.

au lieu de $\cos\varphi$, mais je n'entrerai pas dans le calcul de ce développement, et je me bornerai à donner les résultats suivants qui peuvént être souvent utiles.

1°

$$2\cos m\varphi = (2\cos\varphi)^m - \frac{m}{1}(2\cos\varphi)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{m-6}$$
$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}(2\cos\varphi)^{m-8} - \ldots;$$

2°

$$\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos\varphi)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-5)}{1.2}(2\cos\varphi)^{m-}$$
$$- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{m-7} + \ldots;$$

3°, *m* pair,

$$\cos m\varphi = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[1 - \frac{m^2}{2}\cos^2\varphi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\cos^4\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5.6}\cos^6\varphi + \ldots\right];$$

4°, *m* impair,

$$\cos m\varphi = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[m\cos\varphi - \frac{m(m^2-1)}{2.3}\cos^3\varphi\right.$$
$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\cos^5\varphi$$
$$\left. - \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2.3.4.5.6.7}\cos^7\varphi + \ldots\right];$$

5°, *m* pair,

$$\cos m\varphi = 1 - \frac{m^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\sin^4\varphi$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5.6}\sin^6\varphi + \ldots;$$

6°, m impair,

$$\sin m\varphi = m\sin\varphi - \frac{m(m^2-1)}{2.3}\sin^3\varphi + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\sin^5\varphi - \ldots;$$

7°, m pair,

$$\sin m\varphi = \cos\varphi\left[m\sin\varphi - \frac{m(m^2-2^2)}{2.3}\sin^3\varphi + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5}\sin^5\varphi - \ldots\right];$$

8°, m impair,

$$\cos m\varphi = \cos\varphi\left[1 - \frac{m^2-1}{2}\sin^2\varphi + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}\sin^4\varphi - \ldots\right].$$

II. Je considérerai en second lieu l'expression

$$y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

où le nombre n est nécessairement entier, et qui représente évidemment un polynôme du $n^{ième}$ degré, à l'égard duquel je vais établir la relation

$$y''(x^2-1) + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Soit pour un instant

$$z = (x^2-1)^n,$$

la dérivée logarithmique donnera d'abord l'équation

$$\frac{z'}{z} = \frac{2nx}{x^2-1},$$

ou bien

$$z'(x^2-1) = 2nzx.$$

Je prends maintenant les dérivées d'ordre $n+1$ des deux membres, en faisant usage de la formule établie page 77, savoir

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n}v + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + u\frac{d^n v}{dx^n}.$$

On trouve d'abord pour résultat

$$\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}(x^2-1)+(n+1)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}2x+n(n+1)\frac{d^nz}{dx^n}$$
$$=2n\left[\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}x+(n+1)\frac{d^nz}{dx^n}\right],$$

et il suffit de réduire, en posant

$$y=\frac{d^nz}{dx^n},$$

pour obtenir la relation annoncée

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x^2-1)+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0.$$

L'expression de forme semblable

$$y=\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}},$$

traitée de même, conduirait à l'équation différentielle précédemment obtenue, savoir

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-n^2y=0,$$

et M. Liouville (*) a tiré de là une démonstration simple de cette relation découverte par Jacobi, savoir

$$\frac{(-1)^n n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}=\sin(n\arccos x).$$

III. La formation des équations différentielles s'offre sous un nouveau point de vue dans la question suivante :

Étant donnée une fonction contenant n constantes arbitraires A, B,..., L, *obtenir une équation différentielle à laquelle elle satisfasse, quelles que soient ces constantes.*

Posons

$$y=f(x, A, B,\ldots, L),$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI, p. 69.

puis

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, A, B, \ldots, L),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x, A, B, \ldots, L),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f_n(x, A, B, \ldots, L),$$

l'élimination de A, B,..., L entre ces $n+1$ équations donnera une condition de la forme suivante

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Ce sera l'équation différentielle cherchée, et nous dirons qu'elle est du $n^{ième}$ ordre, pour rappeler l'exposant le plus élevé des diverses dérivées de y qui y figurent. L'étude de ces relations est un des principaux objets du Calcul intégral, et, plus tard, on établira qu'entre certaines limites de la variable indépendante toute équation d'ordre n admet une solution dont l'expression la plus générale renferme n constantes arbitraires. Cette proposition donne ainsi le moyen de former *à priori* des équations différentielles dont on a la solution complète, et en voici un exemple aussi simple qu'important.

Soit

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots + Le^{lx},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont des quantités déterminées; l'élimination de A, B,..., L entre cette équation et les suivantes

$$\frac{dy}{dx} = Aae^{ax} + Bbe^{bx} + \ldots + Lle^{lx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Aa^2e^{ax} + Bb^2e^{bx} + \ldots + Ll^2e^{lx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = Aa^ne^{ax} + Bb^ne^{bx} + \ldots + Ll^ne^{lx},$$

s'effectue en considérant cette combinaison, où $p, q, \ldots, s$

sont n facteurs indéterminés, savoir

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + sy = \mathrm{A}(a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + \ldots + s)e^{ax}$$
$$+ \mathrm{B}(b^n + pb^{n-1} + qb^{n-2} + \ldots + s)e^{bx}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \mathrm{L}(l^n + pl^{n-1} + ql^{n-2} + \ldots + s)e^{lx}.$$

En effet, si l'on pose, pour un instant,

$$f(x) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + s,$$

le second membre devient

$$\mathrm{A}f(a)e^{ax} + \mathrm{B}f(b)e^{bx} + \ldots + \mathrm{L}f(l)e^{lx},$$

et A, B,..., L disparaîtront en déterminant p, q,..., s par les conditions

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \ldots, \quad f(l) = 0,$$

qui donnent sur-le-champ

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

IV. Une autre forme analytique conduit à un calcul tout semblable, c'est l'expression

$$y = \mathrm{A}(x-a)^m + \mathrm{B}(x-b)^m + \ldots + \mathrm{L}(x-l)^m,$$

d'où l'on tire, si l'on fait, pour abréger,

$$m_2 = m(m-1), \quad m_3 = m(m-1)(m-2), \ldots,$$
$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}(x-a)^{m-1} + \mathrm{B}(x-b)^{m-1} + \ldots + \mathrm{L}(x-l)^{m-1},$$
$$\frac{1}{m_2}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A}(x-a)^{m-2} + \mathrm{B}(x-b)^{m-2} + \ldots + \mathrm{L}(x-l)^{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{m_n}\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{A}(x-a)^{m-n} + \mathrm{B}(x-b)^{m-n} + \ldots + \mathrm{L}(x-l)^{m-n}.$$

En posant, en effet, comme tout à l'heure,

$$f(x) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + s,$$

et employant ces identités, savoir

$$f(a)=f[x-(x-a)]=f(x)-\frac{x-a}{1}f'(x)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(x)-\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

$$f(b)=f[x-(x-b)]=f(x)-\frac{x-b}{1}f'(x)+\frac{(x-b)^2}{1.2}f''(x)-\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(x-b)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

. . . . ,

j'en déduirai la combinaison

$$\frac{f(x)}{m_n}\frac{d^ny}{dx^n}-\frac{f'(x)}{m_{n-1}}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{f''(x)}{m_{n-2}}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}-\ldots+\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)y$$
$$=Af(a)(x-a)^{m-n}+Bf(b)(x-b)^{m-n}+\ldots+Lf(l)(x-l)^{m-n}.$$

Or on voit que A, B,..., L disparaîtront encore dans le second membre lorsqu'on prendra

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

de sorte qu'en multipliant par le facteur

$$m_n=m(m-1)\ldots(m-n+1),$$

nous obtenons pour l'équation différentielle cherchée

$$f(x)\frac{d^ny}{dx^n}-\frac{m-n+1}{1}f'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$
$$+\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{1.2}f''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}-\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots m}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)y=0;$$

ou encore, si nous posons, pour plus de simplicité,

$$m-n+1=-\mu,$$

$$f(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{\mu}{1}f'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}f''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)y=0.$$

Équations aux différences partielles.

I. C'est à l'égard des fonctions de plusieurs variables que se présente la question de la formation des équations aux différences partielles, c'est-à-dire des relations entre une fonction z, les variables x, y,..., et les dérivées partielles des divers ordres $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$,.... Considérant d'abord deux variables seulement, le premier point de vue sous lequel nous l'envisageons est celui qui s'offre dans l'étude des cônes, des cylindres, des surfaces de révolution, etc. C'est en effet la définition géométrique d'une famille de surfaces par un certain mode de génération qui conduit à définir analytiquement une fonction z de x et y par le système de deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0, \\ \psi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0, \end{cases}$$

où entrent un paramètre variable α et un nombre quelconque n de fonctions arbitraires de α, représentées par A, B,..., L. Obtenir une équation aux différences partielles, à laquelle satisfasse la fonction z, quels que soient α et ces n fonctions, sera donc la question analogue à celle qui nous a précédemment conduit à la formation d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n.

A cet effet, j'observe en premier lieu que les relations données permettent de considérer x et y comme des fonctions de z dont les dérivées successives

$$x' = \frac{dx}{dz}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots,$$

$$y' = \frac{dy}{dz}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dz^2}, \ldots,$$

s'obtiendront, soit directement si l'on peut avoir x et y explicitement exprimés en z, soit par les règles relatives aux

fonctions implicites. Dans ce dernier cas, nous aurons d'abord

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}x' + \dfrac{d\varphi}{dy}y' + \dfrac{d\varphi}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dx}x' + \dfrac{d\psi}{dy}y' + \dfrac{d\psi}{dz} = 0, \end{cases}$$

puis

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}x'' + \dfrac{d\varphi}{dy}y'' + \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}x'^2 + 2\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dy}x'y' \\ \quad + \dfrac{d^2\varphi}{dy^2}y'^2 + \dfrac{d^2\varphi}{dx\,dz}x' + \dfrac{d^2\varphi}{dy\,dz}y' + \dfrac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dx}x'' + \dfrac{d\psi}{dy}y'' + \dfrac{d^2\psi}{dx^2}x'^2 + 2\dfrac{d^2\psi}{dx\,dy}x'y' \\ \quad + \dfrac{d^2\psi}{dy^2}y'^2 + \dfrac{d^2\psi}{dx\,dz}x' + \dfrac{d^2\psi}{dy\,dz}y' + \dfrac{d^2\psi}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

En second lieu, je remarque que

$$z = f(x, y)$$

étant la fonction qui résulte de l'élimination du paramètre α, on reproduira identiquement la quantité z si l'on y remplace x et y par les valeurs qu'on tire de la résolution des équations (1), car autrement ce serait de deux relations conclure une troisième qui en serait distincte. D'après cela, et envisageant x et y comme fonctions de z, la première dérivée de l'identité obtenue donnera l'égalité suivante

$$(4)\quad \frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' - 1 = 0,$$

la seconde et la troisième celles-ci

$$(5)\quad \frac{dz}{dx}x'' + \frac{dz}{dy}y'' + \frac{d^2z}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}x'y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 = 0,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}x''' + \dfrac{dz}{dy}y''' + 3\left[\dfrac{d^2z}{dx^2}x'x'' + \dfrac{d^2z}{dx\,dy}(x'y'' + y'x'') + \dfrac{d^2z}{dy^2}y'y''\right] \\ \quad + \dfrac{d^3z}{dx^3}x'^3 + 3\dfrac{d^3z}{dx^2dy}x'^2y' + 3\dfrac{d^3z}{dx\,dy^2}x'y'^2 + \dfrac{d^3z}{dy^3}y'^3 = 0, \end{cases}$$

les quantités x', x'', x''', y', y'', y''' devant être remplacées par leurs valeurs en fonctions de z, ou éliminées au moyen

des relations (2), (3), etc. En continuant les mêmes calculs jusqu'à la dérivée d'ordre n, on parviendra à un système de n équations où les dérivées partielles de l'ordre le plus élevé seront évidemment

$$\frac{d^n z}{dx^n}, \quad \frac{d^n z}{dx^{n-1}dy}, \ldots, \quad \frac{d^n z}{dy^n},$$

et, en y joignant les deux relations proposées, il sera possible d'effectuer l'élimination du paramètre α et des n fonctions arbitraires

$$A, B, \ldots, L;$$

c'est le résultat cherché, qui est ainsi une équation aux différences partielles d'ordre n. Dans le cas le plus simple de $n=1$, lorsqu'il n'existe qu'une seule fonction arbitraire, cette équation aux différences partielles s'obtient immédiatement en résolvant par rapport à α et A les équations

$$\varphi(x, y, z, \alpha, A) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, \alpha, A) = 0.$$

Ayant en effet

$$\alpha = \Phi(x, y, z),$$
$$A = \Psi(x, y, z),$$

il ne restera plus trace du paramètre ni de la fonction arbitraire dans les relations (2) qui deviennent

$$\frac{d\Phi}{dx}x' + \frac{d\Phi}{dy}y' + \frac{d\Phi}{dz} = 0,$$
$$\frac{d\Psi}{dx}x' + \frac{d\Psi}{dy}y' + \frac{d\Psi}{dz} = 0,$$

et le résultat de l'élimination de x' et y' entre ces équations et l'équation (4) est immédiatement donné en égalant à zéro le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & \frac{d\Phi}{dx} & \frac{d\Psi}{dx} \\ \frac{dz}{dy} & \frac{d\Phi}{dy} & \frac{d\Psi}{dy} \\ -1 & \frac{d\Phi}{dz} & \frac{d\Psi}{dz} \end{vmatrix}.$$

II. Soit, pour premier exemple, les équations

$$x = mz + \alpha,$$
$$y = nz + A,$$

qui représentent la génératrice d'un cylindre, nous aurons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & 1 & 0 \\ \frac{dz}{dy} & 0 & 1 \\ -1 & -m & -n \end{vmatrix} = m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} - 1;$$

l'équation aux différences partielles des *surfaces cylindriques* est donc

$$m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} - 1 = 0.$$

La ligne droite

$$x - x_0 = \alpha(z - z_0),$$
$$y - y_0 = A(z - z_0),$$

est la génératrice d'un cône; on trouve alors:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & \frac{1}{z - z_0} & 0 \\ \frac{dz}{dy} & 0 & \frac{1}{z - z_0} \\ -1 & -\frac{x - x_0}{(z - z_0)^2} & -\frac{y - y_0}{(z - z_0)^2} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{(x - x_0)\frac{dz}{dx} + (y - y_0)\frac{dz}{dy} - (z - z_0)}{(z - z_0)^2},$$

et, par conséquent, pour l'équation aux différences partielles des *surfaces coniques*,

$$(x - x_0)\frac{dz}{dx} + (y - y_0)\frac{dz}{dy} = z - z_0.$$

Les *surfaces de révolution* sont engendrées par la circonférence

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) = \alpha,$$
$$ax + by + cz = A,$$

ce qui nous donnera

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & x - x_0 & a \\ \frac{dz}{dy} & y - y_0 & b \\ -1 & z - z_0 & c \end{vmatrix},$$

et par conséquent l'équation aux différences partielles

$$[c(y-y_0) - b(z-z_0)]\frac{dz}{dx} + [a(z-z_0) - c(x-x_0)]\frac{dz}{dy}$$
$$= b(x-x_0) - a(y-y_0).$$

Les *conoïdes* enfin ont pour génératrice la ligne droite

$$x - mz - p - \alpha(y - nz - q) = 0,$$
$$ax + by + cz = A,$$

qui se meut parallèlement au plan fixe $ax + by + cz = 0$, et rencontre la droite

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q.$$

L'équation aux différences partielles se présente donc sous la forme

$$(x - mz - p)\left[-(nb + c)\frac{dz}{dx} + na\frac{dz}{dy} + a\right]$$
$$+ (y - nz - q)\left[mb\frac{dz}{dx} - (ma + c)\frac{dz}{dy} + b\right] = 0,$$

qui devient plus simplement

$$(x - mz - p)\frac{dz}{dx} + (y - nz - q)\frac{dz}{dy} = 0,$$

lorsque le plan fixe est celui des xy.

III. La Géométrie donne encore d'autres exemples qui conduisent à l'élimination de deux et de trois fonctions arbitraires.

Soient, en premier lieu, les équations

$$x - mz - p = A(z - \alpha),$$
$$y - nz - q = B(z - \alpha),$$

représentant une droite qui rencontre dans toutes les positions

la droite fixe

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q.$$

Nous trouverons d'abord

$$y' = B + n, \quad y'' = 0,$$
$$x' = A + m, \quad x'' = 0,$$

et, observant ensuite que

$$(y - nz - q)A - (x - mz - p)B = 0,$$

nous en conclurons

$$(y' - n)A - (x' - m)B = 0,$$

et, en éliminant $\frac{A}{B}$,

$$(y - nz - q)x' - (x - mz - p)y' = m(y - q) - n(x - p),$$

ou bien

$$vx' - uy' = w,$$

si l'on pose, pour abréger,

$$u = x - mz - p,$$
$$v = y - nz - q,$$
$$w = m(y - q) - n(x - p).$$

Ayant d'ailleurs

$$\frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' = 1,$$

il en résulte ces valeurs

$$x' = \frac{u + \frac{dz}{dy}w}{\frac{dz}{dx}u + \frac{dz}{dy}v}, \quad y' = \frac{v + \frac{dz}{dy}w}{\frac{dz}{dx}u + \frac{dz}{dy}w},$$

et l'équation (5) de la page 216 donne l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(u + \frac{dz}{dy}w\right)^2$$
$$+ 2\frac{d^2z}{dxdy}\left(u + \frac{dz}{dy}w\right)\left(v - \frac{dz}{dy}w\right) + \frac{d^2z}{dy^2}\left(v - \frac{dz}{dx}w\right)^2 = 0.$$

Elle se simplifie si l'on suppose $m=0$, $p=0$, $n=0$, $q=0$, de sorte que la droite fixe soit l'axe des z, et devient

$$\frac{d^2z}{dx^2}x^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}xy+\frac{d^2z}{dy^2}y^2=0.$$

Les *surfaces gauches à plan directeur* ayant pour génératrice la droite

$$ax+by+cz=\alpha,$$
$$x=\mathrm{A}z+\mathrm{B},$$

parallèle à un plan fixe

$$ax+by+cz=0,$$

conduisent au calcul suivant.

Nous aurons d'abord

$$ax'+by'+c=0,\quad x'=\mathrm{A},$$

puis

$$x''=0,\quad y''=0,$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$\frac{d^2z}{dx^2}x'^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}x'y'+\frac{d^2z}{dy^2}y'^2=0.$$

Cela étant, les deux relations

$$ax'+by'=-c,\quad \frac{dz}{dx}x'+\frac{dz}{dy}y'=1$$

donnent

$$x'=\frac{b+c\dfrac{dz}{dy}c}{b\dfrac{dz}{dx}-a\dfrac{dz}{dy}},\quad y'=-\frac{a+\dfrac{dz}{dx}c}{b\dfrac{dz}{dx}-a\dfrac{dz}{dy}},$$

et l'on en conclut, pour l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(b+\frac{dz}{dy}c\right)$$
$$-2\frac{d^2z}{dx\,dy}\left(b+\frac{dz}{dy}c\right)\left(a+\frac{dz}{dx}c\right)+\frac{d^2z}{dy^2}\left(a+\frac{dz}{dx}c\right)^2=0.$$

Lorsque le plan directeur est le plan des yz, il faut supposer $b=0$, $c=0$, et l'on a simplement $\frac{d^2z}{dy^2}=0$; résultat évi-

dent *à priori*, l'élimination de α donnant pour z un binôme du premier degré en y.

Ce sont enfin les *surfaces réglées* dont la génératrice a pour équations

$$x = Az + B, \quad y = \alpha z + C,$$

qui serviront d'exemple d'élimination de trois fonctions arbitraires. Or, ayant dans ce cas

$$x' = A, \quad x'' = 0, \quad x''' = 0,$$
$$y' = \alpha, \quad y'' = 0, \quad y''' = 0,$$

les équations (5) et (6) de la page 216 donnent sur-le-champ

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{A^2}{\alpha^2} + 2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{A}{\alpha} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}\frac{A^3}{\alpha^3} + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{A^2}{\alpha^2} + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{A}{\alpha} + \frac{d^3z}{dy^3} = 0,$$

de sorte qu'en faisant pour un instant

$$\omega = \frac{-\dfrac{d^2z}{dxdy} + \sqrt{\left(\dfrac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \dfrac{d^2z}{dx^2}\dfrac{d^2z}{dy^2}}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}},$$

l'équation aux différences partielles du troisième ordre sera

$$\frac{d^3z}{dx^3}\omega^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\omega^2 + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\omega + \frac{d^3z}{dy^3} = 0.$$

IV. La considération des surfaces enveloppes, où s'offre un mode de génération entièrement différent des précédents, conduit en Analyse à définir une fonction z de x et y par deux équations contenant un paramètre variable α, et dont l'une est la dérivée de l'autre par rapport à ce paramètre (page 196). En désignant de nouveau par A, B,..., L, n fonctions arbitraires de α, ces conditions s'expriment ainsi :

$$(1) \qquad f(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{df(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L)}{d\alpha} = 0,$$

et nous nous proposerons encore de former, entre la fonction et les variables indépendantes, une équation aux diffé-

rences partielles qui subsiste quelles que soient ces fonctions.

A cet effet, je conçois que x et y soient déterminés par les équations (1) et (2) en fonction de z, de manière à avoir toujours les relations obtenues page 216 :

$$\frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' - 1 = 0,$$

$$\frac{dz}{dx}x'' + \frac{dz}{dy}y'' + \frac{d^2z}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}x'y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

mais je procéderai différemment pour calculer les dérivées $x' = \frac{dx}{dz}$, $y' = \frac{dy}{dz}, \ldots$, en mettant à profit une circonstance importante qui s'offre lorsqu'on veut tirer de ces équations les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. Différentiant pour cela la première par rapport à x, en supposant α fonction de x, y, z, il vient

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

ou simplement, d'après l'équation (2),

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

et l'on obtiendrait de même

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Or nous n'avons plus dans ces relations les dérivées des fonctions arbitraires par rapport au paramètre, et nous en tirerons les quantités cherchées x', y',... exprimées au moyen seulement de A, B,..., L, en observant que $\frac{dz}{dx}$, par exemple, étant une fonction entièrement déterminée de x et y, que j'appellerai pour un moment $\theta(x, y)$, on aura

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dx}x' + \frac{d\theta}{dy}y';$$

d'où l'on voit qu'on devra écrire

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dz} = \frac{d^2z}{dx^2}x' + \frac{d^2z}{dx\,dy}y',$$

et pareillement

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dz} = \frac{d^2z}{dx\,dy}x' + \frac{d^2z}{dy^2}y'.$$

D'après cela, en représentant les dérivées partielles du premier et du second ordre par p, q, r, s, t, comme page 79, afin d'abréger l'écriture, nous aurons, pour déterminer x' et y', ces deux équations

$$\frac{d^2f}{dx^2}x' + \frac{d^2f}{dx\,dy}y' + \frac{d^2f}{dx\,dz} + \left(\frac{d^2f}{dx\,dz}x' + \frac{d^2f}{dy\,dz}y' + \frac{d^2f}{dz^2}\right)p + \frac{df}{dz}(rx' + sy') = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}x' + \frac{d^2f}{dy^2}y' + \frac{d^2f}{dy\,dz} + \left(\frac{d^2f}{dx\,dz}x' + \frac{d^2f}{dy\,dz}y' + \frac{d^2f}{dz^2}\right)q + \frac{df}{dz}(sx' + ty') = 0;$$

et il est clair qu'en continuant de différentier par rapport à z, on formera de proche en proche les dérivées de x et y jusqu'à un ordre quelconque $n-1$, avec cette circonstance que les dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre n seront introduites dans leurs expressions. Il en résulte qu'en les substituant dans les relations (4), (5), (6), etc. de la page 216, on sera conduit à un système de n équations entre ces dérivées partielles et les quantités α, A, B,..., L. Nous pouvons donc, en y joignant celles-ci,

$$f(x, y, z, \alpha, \text{A}, \text{B},\ldots, \text{L}) = 0,$$
$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q = 0,$$

effectuer l'élimination du paramètre et des n fonctions arbitraires; c'est le résultat cherché, qui est ainsi une équation aux différences partielles d'ordre n. Nous allons en faire l'application à deux exemples tirés de la Géométrie, après avoir re-

marqué que les équations ci-dessus, en x' et y', jointes à la relation (4) de la page 216, savoir

$$px' + qy' - 1 = 0,$$

donnent, par l'élimination de x' et y', la condition $\Delta = 0$, Δ étant le déterminant du système suivant

$$\left|\begin{array}{lll} p, & \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdz}p + \frac{df}{dz}r, & \frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dxdz}q + \frac{df}{dz}s \\ q, & \frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dydz}p + \frac{df}{dz}s, & \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dydz}q + \frac{df}{dz}t \\ -1, & \frac{d^2f}{dxdz} + \frac{d^2f}{dz^2}p, & \frac{d^2f}{dydz} + \frac{d^2f}{dz^2}q \end{array}\right|.$$

Mais, si l'on ajoute aux termes de la première et de la seconde ligne horizontale ceux de la troisième, multipliés d'abord par p et ensuite par q, on aura plus simplement

$$\Delta = \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C},$$

en posant

$$\mathcal{A} = \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdz}p + \frac{d^2f}{dz^2}p^2 + \frac{df}{dz}r,$$

$$\mathcal{B} = \frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dydz}p + \frac{d^2f}{dxd}q + \frac{d^2f}{dz^2}pq + \frac{df}{dz}s,$$

$$\mathcal{C} = \frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dydz}q + \frac{d^2f}{dz}q^2 + \frac{df}{dz}t.$$

V. Nous considérerons en premier lieu les *surfaces développables*, enveloppes des positions d'un plan mobile

$$z + \alpha x + Ay + B = 0,$$

et nous aurons immédiatement

$$\mathcal{A} = r, \quad \mathcal{B} = s, \quad \mathcal{C} = t;$$

d'où, par conséquent, l'équation aux différences partielles du second ordre

$$s^2 - rt = 0,$$

déjà obtenue par une autre voie, p. 197.

Soit, en second lieu, les *surfaces canaux*, enveloppes des positions d'une sphère de rayon constant

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - \alpha)^2 = a^2,$$

dont le centre décrit une courbe quelconque. On obtient alors

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{A} = 1 + p^2 + (z - \alpha)r,$$
$$\tfrac{1}{2}\mathcal{B} = pq + (z - \alpha)s,$$
$$\tfrac{1}{2}\mathcal{C} = 1 + q^2 + (z - \alpha)t,$$

et le paramètre α s'élimine au moyen des relations

$$x - A + (z - \alpha)p = 0, \quad y - B + (z - \alpha)q = 0,$$

qui donnent, en substituant dans l'équation de la sphère,

$$z - \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

On obtient ainsi l'équation aux différences partielles du second ordre

$$a^2(s^2 - rt) - a[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\sqrt{1 + p^2 + q^2} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

La relation générale dont nous venons de faire usage, à savoir

$$\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} = 0,$$

peut encore se démontrer très-facilement comme il suit. Je reprends, à cet effet, les deux équations

$$\varphi(x, y, z, \alpha) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, \alpha) = 0,$$

pour les différentier successivement par rapport à x et y, en supposant que le paramètre variable tiré de l'une d'elles en fonction de x, y, z, ait été substitué dans l'autre. Or on obtient ainsi

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p + \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q + \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = 0,$$
$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dz}p + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}q + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

et, en remarquant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}, & \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} \\ \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}, & \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} \end{vmatrix}$$

s'évanouit, nous en concluons la relation suivante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\varphi}{dz}p, & \dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{d\varphi}{dz}q \\ \dfrac{d\psi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dz}p, & \dfrac{d\psi}{dy}+\dfrac{d\psi}{dz}q \end{vmatrix} = 0.$$

Cela posé, prenons en particulier

$$\varphi(x, y, z, \alpha) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p,$$

$$\psi(x, y, z, \alpha) = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q,$$

on en tirera immédiatement

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p = \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{d^2 f}{dx\,dz}p + \frac{d^2 f}{dz^2}p^2 + \frac{df}{dz}r = \mathcal{A},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dz}p$$

$$= \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dy\,dz}p + \frac{d^2 f}{dx\,dz}q + \frac{d^2 f}{dz^2}pq + \frac{df}{dz}s = \mathcal{B},$$

$$\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}q = \frac{d^2 f}{dy^2} + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz}q + \frac{d^2 f}{dz^2}q^2 + \frac{df}{dz}t = \mathcal{C},$$

et, par suite, l'équation cherchée

$$\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} = 0.$$

VI. Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici de la formation des équations aux différences partielles que dans le cas d'une fonction de deux variables. Considérons maintenant, par exemple, une fonction u de x, y, z, en la définissant par ces trois équations, où entrent deux paramètres α, β et un nombre quelconque n de fonctions arbitraires A, B,..., L de ces paramètres, savoir :

$$\varphi(x, y, z, u, \alpha, \beta, A, B, \ldots, L) = 0,$$

$$\psi(x, y, z, u, \alpha, \beta, A, B, \ldots, L) = 0,$$

$$\theta(x, y, z, u, \alpha, \beta, A, B, \ldots, L) = 0.$$

L'élimination des fonctions arbitraires s'effectuera par la même méthode que précédemment, et donnera pour résultat

une équation aux différences partielles d'ordre n. La même conclusion s'obtiendra aussi en considérant les relations

$$f(x, y, z, u, \alpha, \beta, A, B, \ldots, L) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df}{d\beta} = 0;$$

mais elle n'a plus lieu si l'on pose seulement deux équations avec un seul paramètre variable, savoir

$$\varphi(x, y, z, u, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, u, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0,$$

car alors on peut former une équation aux différences partielles d'ordre n, représentant le résultat de l'élimination d'un nombre de fonctions arbitraires supérieur à n et égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. Et quand le nombre des quantités A, B,..., L n'est point compris dans cette formule, par exemple lorsqu'on le prend égal à 4, de sorte qu'on ne puisse pas obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre, on parviendra, en introduisant les dérivées du troisième ordre, à plusieurs relations distinctes au lieu d'une seule. C'est là une circonstance que présente souvent l'élimination des fonctions arbitraires, et je vais en donner un exemple en considérant l'expression

$$z = f[x, y, F_1(u), F_2(v)],$$

où $F_1(u)$ et $F_2(v)$ sont deux fonctions arbitraires de u et v, qui sont des fonctions déterminées de x et y. Qu'on forme, en effet, les dérivées partielles du premier et du second ordre de z, on obtiendra six équations où entrent les quantités

$$F_1(u),\ F_1'(u),\ F_1''(u),$$
$$F_2(v),\ F_2'(v),\ F_2''(v),$$

dont l'élimination ne sera pas possible, en général. Mais, en s'élevant aux dérivées partielles du troisième ordre, on ajoute quatre équations en introduisant seulement deux nouvelles quantités $F_1'''(u)$, $F_2'''(u)$, de sorte qu'il deviendra possible de former autant d'équations du troisième ordre qu'il y a de manières d'éliminer huit inconnues entre dix équations. On doit

donc avoir en vue principalement les formes analytiques où l'élimination des fonctions arbitraires donne lieu à une conclusion précise, à une seule et unique équation aux différences partielles, et j'indiquerai encore celle d'Euler, savoir

$$z = F_1(x + ay) + F_2(x + by) + \ldots + F_n(x + ly).$$

En faisant

$$(x - a)(x - b)\ldots(x - l) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + s,$$

on trouve facilement

$$\frac{d^n z}{dy^n} + p\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} + q\frac{d^n z}{dx^2 dy^{n-2}} + \ldots + s\frac{d^n z}{dx^n} = 0.$$

Ainsi, par exemple, l'expression

$$z = F_1(x + ay) + F_2(x - ay)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - a^2\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

qui s'offre dans d'importantes questions de Mécanique et de Physique.

CALCUL INTÉGRAL.

PREMIERS PRINCIPES.

Remarques préliminaires sur la notion d'intégrale définie.

Les applications du Calcul infinitésimal à la Mécanique et à la Physique conduisent, comme la Géométrie nous en a précédemment donné des exemples, à des équations différentielles ordinaires et aux différences partielles. Obtenir les fonctions satisfaisant à ces équations constitue une question importante autant que difficile, qui est l'objet du Calcul intégral. Cette nouvelle partie de l'Analyse présente ainsi, avec l'Algèbre, dont le but est la résolution des équations, une analogie dont j'indiquerai succinctement quelques caractères. L'existence même des racines, comme quantités réelles ou imaginaires, est le premier point à établir dans la théorie des équations algébriques, et l'étude des équations différentielles s'ouvre de même en démontrant que, sous certaines conditions, il existe, pour une suite de valeurs de la variable, une succession déterminée de valeurs de la fonction inconnue, qu'on peut obtenir au moins numériquement, quand on ne sait point former analytiquement l'expression de cette fonction. L'Algèbre se propose ensuite de résoudre les équations par radicaux, ou de reconnaître l'impossibilité de ce mode de résolution, et cette recherche, en faisant découvrir la diversité de nature des racines des équations, a conduit à les définir et les classer, résultats importants qui sont le principal intérêt de cette science à notre époque. Or le Calcul intégral a de même pour but d'obtenir les solutions des équations différentielles

d'une espèce analytique donnée, ou de démontrer qu'il n'en existe point de telles; et, dans le petit nombre de cas où elle a pu être abordée, cette étude a été féconde en conséquences. Elle sert, en effet, de voie naturelle pour arriver à concevoir, dans son sens le plus général, la notion première de fonction telle qu'elle s'offre dans l'Algèbre, pour reconnaître et caractériser divers modes d'existence des fonctions, et enfin pour conduire à l'origine d'une infinité de transcendantes, constituant, par leurs propriétés, de nouveaux éléments du calcul, qui agrandissent le champ de l'Analyse, et ajoutent à sa puissance.

La recherche des fonctions ayant pour dérivée une fonction donnée, dont nous nous occuperons en premier lieu, est, à cet égard, d'une importance fondamentale; voici les premiers principes sur lesquels elle repose.

I. Nous avons précédemment établi, p. 99, que l'aire de la courbe $y = f(x)$, rapportée à des coordonnées rectangulaires et comprise entre l'axe des x, deux ordonnées correspondant aux abscisses x_0 et x, et l'arc de la courbe, est la limite de la somme

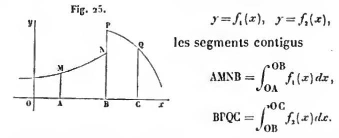
$$\left\{ f(x_0) + f(x_0 + dx) + \ldots + f[x_0 + (n-1)dx] \right\} dx,$$

lorsqu'en supposant $x = x_0 + n dx$, on fait tendre dx vers zéro, en augmentant indéfiniment le nombre entier n. Cette limite, représentée par la notation $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ et constituant ainsi une quantité entièrement déterminée lorsqu'on donne x_0 et x, a reçu, comme on l'a dit, le nom d'*intégrale définie* de $f(x)dx$, prise depuis x_0 jusqu'à x, et sa propriété fondamentale est d'avoir pour dérivée, par rapport à x, la fonction $f(x)$. Cette notion d'intégrale définie obtenue si rapidement, et par les considérations les plus élémentaires, sert de fondement au Calcul intégral. Nous allons la compléter par les remarques suivantes.

Rappelant d'abord qu'on a essentiellement supposé la fonction $f(x)$ réelle et continue, je dis en premier lieu que cette

condition de continuité entre les limites de l'intégration n'est pas nécessaire. Considérons en effet (*fig.* 25), à l'égard de deux courbes différentes

Fig. 25.



$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

les segments contigus

$$\text{AMNB} = \int_{\text{OA}}^{\text{OB}} f_1(x)\,dx,$$

$$\text{BPQC} = \int_{\text{OB}}^{\text{OC}} f_2(x)\,dx.$$

L'aire formée par leur réunion, étant la limite de la somme des quantités $f(x)dx$, lorsqu'on suppose $f(x)$ égal à $f_1(x)$ depuis $x = \text{OA}$ jusqu'à $x = \text{OB}$ et égal ensuite à $f_2(x)$ depuis $x = \text{OB}$ jusqu'à $x = \text{OC}$, pourra être représentée par l'expression $\int_{\text{OA}}^{\text{OC}} f(x)dx$, dont la signification reçoit ainsi l'extension annoncée. On aura pareillement la relation plus générale

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)\,dx,$$

lorsque la fonction $f(x)$ coïncidera successivement avec $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ pour les valeurs de la variable comprises entre les intervalles de x_0 à x_1, x_1 à $x_2, \ldots, x_{n-1}$ à x_n. Bientôt nous aurons l'exemple, qui s'offrira de lui-même, d'une expression analytique passant brusquement d'une suite de valeurs à une autre, et une théorie importante de Calcul intégral a précisément pour objet de donner l'expression de $f(x)$ à l'aide de séries ou d'intégrales définies; mais, pour plus de simplicité, voici, en revenant au cas de l'aire AMNB + BPQC la remarque qu'il importe maintenant de faire. En supposant OA fixe et OC variable, on a la définition géométrique d'une fonction qui est manifestement continue, puisque l'accroissement de l'aire, même dans le voisinage de la valeur $x = \text{OB}$, décroît indéfiniment avec l'accroissement de la variable; or elle a pour dérivée une fonction toujours finie, mais discontinue.

C'est un premier exemple montrant combien les fonctions auxquelles donne naissance l'opération nouvelle d'intégration diffèrent de celles qui ont été envisagées jusqu'ici, et qui sont données par les éléments.

II. Une autre remarque sur la notion d'intégrale définie a pour objet le cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être constamment positive entre les limites x_0 et x, présente plusieurs alternatives de signes, de sorte que, par exemple, $f(x)$ ait le signe $+$ de x_0 à x_1, le signe $-$ de x_1 à x_2, et le signe $+$ de x_2 à x. On conviendra alors de poser

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x} f(x)\,dx,$$

et il est évident qu'en étendant de cette manière la première signification de l'intégrale définie, elle restera toujours la limite de la somme

$$\{f(x_0) + f(x+dx) + \ldots + f[x_0 + (n-1)dx]\}\,dx.$$

D'autre part, on a aussi admis que la limite supérieure x surpassait la limite inférieure : la considération de la somme des éléments permettra encore de supprimer cette restriction. Ayant en effet

$$x = x_0 + n\,dx,$$

d'où

$$dx = \frac{x - x_0}{n},$$

on peut, en lui ajoutant le terme évanouissant $f(x)\,dx$, l'écrire ainsi

$$\left[f(x_0) + f\left(x_0 + \frac{x - x_0}{n}\right) + \ldots + f\left(x_0 + i\frac{x - x_0}{n}\right) + \ldots + f(x)\right]\frac{x - x_0}{n}.$$

Or, en renversant dans la parenthèse l'ordre des termes, ce qui donne

$$f(x) + f\left(x - \frac{x - x_0}{n}\right) + f\left(x - 2\frac{x - x_0}{n}\right) + \ldots + f(x_0),$$

on voit qu'on a ainsi permuté les quantités x et x_0 sans changer leur somme, mais alors le facteur $\frac{x - x_0}{n}$ change de signe;

et nous en conclurons, en faisant croître n indéfiniment, la relation

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx,$$

qui étend la notion de l'intégrale définie au cas de $x < x_0$.

Si l'on connaissait sous forme explicite une fonction $\varphi(x)$ ayant $f(x)$ pour dérivée, ce résultat serait évident. Sachant en effet que deux fonctions dont les dérivées sont égales ne peuvent différer que d'une constante, on peut écrire

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) + \text{C}.$$

Faisant, dans cette égalité qui a lieu quel que soit x, $x = x_0$, le premier membre d'après sa signification même sera nul, et l'on aura

$$0 = \varphi(x_0) + \text{C}, \quad \text{d'où} \quad \text{C} = -\varphi(x_0),$$

et, par suite,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

expression de l'intégrale définie qui change évidemment de signe quand on permute les limites.

Nous remarquerons enfin qu'en supposant $f(x)$ imaginaire et réductible à la forme $f_0(x) + \sqrt{-1}\,f_1(x)$, où les fonctions $f_0(x)$ et $f_1(x)$ sont réelles, on adoptera l'égalité

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f_0(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx,$$

et si l'on connaît une fonction

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sqrt{-1}\,\varphi_1(x),$$

telle qu'on ait

$$\varphi'(x) = f(x),$$

et par conséquent

$$\varphi'_0(x) = f_0(x), \quad \varphi'_1(x) = f_1(x),$$

on en conclura

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} \varphi'_0(x)dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} \varphi'_1(x)dx$$
$$= [\varphi_0(x) - \varphi_0(x_0)] + \sqrt{-1}[\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)],$$

et, par suite,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

comme pour les fonctions réelles.

III. Pour donner une application de la remarque précédente, soit

$$f(x) = (x-a)^m \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1};$$

on aura, non-seulement pour des valeurs réelles de la constante a, mais en supposant $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$,

$$\varphi'(x) = f(x),$$

et on en conclut, par suite,

$$\int (x-a)^m dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + \text{C}.$$

Cette relation présente, pour $m = -1$, un cas d'exception donnant lieu à une remarque importante lorsque a est imaginaire, comme on l'a admis, car autrement on sait déjà que l'on a

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + \text{C}.$$

Considérons, en effet, l'expression générale des logarithmes des quantités imaginaires obtenue précédemment, p. 36, et qui donne, en supposant x réel,

$$\log\left(x - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right) = \log\sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + (\varphi + 2k\pi)\sqrt{-1},$$

l'angle φ étant déterminé par les deux conditions

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}} = \sin\varphi,$$

et, par suite, renfermé dans l'expression

$$\text{arc tang}\frac{-\beta}{x-\alpha},$$

ou encore dans celle-ci

$$\frac{\pi}{2}+\text{arc tang}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

On tirera de cette égalité

$$\frac{d\log\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)}{dx}=\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{d\varphi}{dx}\sqrt{-1}$$
$$=\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\beta\sqrt{-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}.$$

L'expression des logarithmes des quantités imaginaires, telle que nous venons de la rappeler, permet donc de poser

$$\int\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\log\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)+\text{C};$$

or ce résultat, joint au précédent, dans lequel je change m en $-m$, savoir

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=-\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+\text{C},$$

suffit pour obtenir l'intégrale de toute fonction rationnelle de x. Une telle fonction est, en effet, la somme de termes entiers comme $\text{A}x^n$, et de fractions simples de l'une ou l'autre de ces deux formes $\frac{\text{G}}{(x-a)^m}$, $\frac{\text{H}}{x-a}$, la quantité a étant réelle ou imaginaire. Employant donc cette proposition, évidente d'elle-même, que l'intégrale d'une somme de fonctions est la somme des intégrales de chacune d'elles, on en conclut que l'intégrale d'une fraction rationnelle quelconque sera composée d'un nombre fini de termes, tels que

$$\int\text{A}x^n\,dx=\frac{\text{A}x^{n+1}}{n+1},$$

$$\int\frac{\text{G}\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{\text{G}}{(m-1)(x-a)^{m-1}}\quad\text{et}\quad\int\frac{\text{H}\,dx}{x-a}=\text{H}\log(x-a).$$

Devant bientôt revenir sur cette question pour l'approfondir davantage, je passe à une dernière observation relative aux intégrales définies considérées en général.

IV. Introduisons dans la différentielle $f(x)\,dx$ une nouvelle variable, en posant

$$x = \mathrm{F}(\theta);$$

elle prendra la forme

$$f[\mathrm{F}(\theta)]\,\mathrm{F}'(\theta)\,d\theta.$$

Cela posé, si, la quantité x croissant ou décroissant d'une manière continue de x_0 à x_1, θ varie toujours aussi dans le même sens, et qu'on ait

$$x_0 = \mathrm{F}(\theta_0), \quad x_1 = \mathrm{F}(\theta_1),$$

nous en conclurons

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f[\mathrm{F}(\theta)]\,\mathrm{F}'(\theta)\,d\theta = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Cette nouvelle intégrale représente encore, en effet, l'aire de la courbe $y = f(x)$, considérée comme limite de la somme des rectangles obtenus en prenant pour abscisses des points de division de la base du segment, les quantités $x_0 = \mathrm{F}(\theta_0)$, $x_1 = \mathrm{F}(\theta_0 + d\theta)$, $x_2 = \mathrm{F}(\theta_0 + 2\,d\theta), \ldots$, au lieu des abscisses équidistantes. Effectivement, il a été permis, sans altérer la limite de la somme, de remplacer dx, devenu variable, par $\mathrm{F}'(\theta)d\theta$, qui n'en diffère que par un infiniment petit du second ordre, et d'ailleurs on sait que tous les modes de décomposition donnent la même limite.

On voit combien il est nécessaire de supposer la fonction $\mathrm{F}(\theta)$ essentiellement réelle, car ce que nous venons de dire n'aurait plus aucun sens dans l'hypothèse d'une substitution imaginaire. C'est seulement dans le cours de seconde année que de telles substitutions seront considérées, en traitant une seconde partie du Calcul intégral qui a pour fondement la notion, donnée par Cauchy, d'une intégrale prise entre des limites imaginaires. En ce moment, il nous suffit de remar-

quer qu'étant donnée sous forme finie explicite une fonction $\mathfrak{F}(\theta)$, telle qu'on ait identiquement

$$f[F(\theta)]F'(\theta) = \mathfrak{F}'(\theta),$$

$F(\theta)$ étant réelle ou imaginaire, il viendra, si l'on pose

$$\varphi[F(\theta)] = \mathfrak{F}(\theta)$$

et qu'on égale les dérivées par rapport à θ,

$$\varphi'[F(\theta)]F'(\theta) = f[F(\theta)]F'(\theta);$$

d'où

$$\varphi'[F(\theta)] = f[F(\theta)],$$

et, par conséquent,

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Ainsi l'intégrale indéfinie $\varphi(x)$ sera elle-même obtenue sous forme explicite en substituant, dans $\mathfrak{F}(\theta)$, l'expression de θ donnée par la résolution de l'équation $x = F(\theta)$.

Nous n'étendrons pas davantage ces remarques, et, en réservant pour le cours de seconde année l'étude des cas où la fonction est discontinue en devenant infinie, nous arrivons immédiatement à l'importante question des procédés et méthodes d'intégration. Ces procédés, qui sont en petit nombre, bien que conduisant à des combinaisons analytiques multipliées, reposent sur des considérations extrêmement simples. Ainsi, l'un des plus importants consiste dans l'emploi d'un changement de variable, dont l'effet est de ramener l'intégrale proposée à une autre qu'on sait obtenir. Ayant donc une méthode d'intégration pour les fonctions rationnelles, nous nous trouvons conduits à énumérer et définir les expressions irrationnelles ou transcendantes, dont l'intégrale peut se réduire par une substitution à celle d'une fonction qui est rationnelle par rapport à la nouvelle variable. C'est l'objet des considérations suivantes.

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

Notions sur les courbes unicursales.

I. Considérant en premier lieu les fonctions algébriques, je rappellerai d'abord qu'on a trouvé dans l'introduction, p. 15, qu'en faisant dans l'expression

$$f[x, \sqrt{(x-a)(x-b)}],$$

où la variable et le radical entrent rationnellement, la substitution suivante

$$x = \frac{b - a\theta^2}{1-\theta^2},$$

le radical disparaît. On a effectivement

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = \frac{(b-a)\theta}{1-\theta^2},$$

de sorte que l'intégrale

$$\int f[x, \sqrt{(x-a)(x-b)}]dx,$$

devenant, par ce changement de variable,

$$\int f\left(\frac{b-a\theta^2}{1-\theta^2}, \frac{(b-a)\theta}{1-\theta^2}\right)\frac{2(b-a)\theta d\theta}{(1-\theta^2)^2},$$

pourra être obtenue explicitement en θ. Nous en conclurons, si on la représente par $\mathfrak{F}(\theta)$, d'après la remarque faite p. 239, qu'on a identiquement, la relation entre les deux variables étant ou non sous forme réelle,

$$\int f[x, \sqrt{(x-a)(x-b)}]dx = \mathfrak{F}\left(\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\right).$$

Soit encore l'expression

$$f(x^a, x^b, \ldots, x^l),$$

où je suppose les exposants $a, b, \ldots, l$ commensurables, et la fonction rationnelle par rapport aux monômes $x^a, x^b, \ldots, x^l$. Les irrationnalités disparaîtront en faisant $x = \theta^m$, si l'on prend

pour m le plus petit multiple des dénominateurs de $a, b, \dots, l$, et l'intégrale

$$\int f(x^a, x^b, \dots, x^l)\,dx$$

est encore immédiatement réduite par ce changement de variable à celle d'une fonction rationnelle, à savoir

$$\int f(\theta^{ma}, \theta^{mb}, \dots, \theta^{ml})\,m\theta^{m-1}\,d\theta.$$

Ceci s'applique en particulier à l'intégrale

$$\int x^\alpha(\alpha + \beta x^b)^p\,dx,$$

qu'on peut ramener à la forme semblable, mais où les exposants m et n sont entiers, savoir

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx.$$

Elle s'obtiendra donc lorsque p est un nombre entier positif ou négatif; mais, s'il n'en est pas ainsi, soit

$$a + bx^n = z,$$

d'où

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

et, par suite,

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int z^p(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz.$$

Cette transformée pourra donc être déterminée si l'exposant $\frac{m+1}{n}$ de $z - a$ est entier. Ce cas n'est pas le seul; on a identiquement, en effet,

$$x^m(a + bx^n)^p = x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p,$$

et, en appliquant la condition qui vient d'être trouvée à l'intégrale

$$\int x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p\,dx,$$

nous voyons qu'on pourra l'obtenir si $\frac{m+np+1}{-n}$ est entier (*).

Dans ces exemples, c'est la forme même des expressions placées sous le signe d'intégration qui a conduit aux substitutions employées, mais il est aisé de reconnaître que la considération directe des irrationnelles algébriques ne se prête que difficilement à la recherche que nous avons en vue. Ainsi, ce n'est pas en opérant sur l'expression suivante

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3 + x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3 + x^6}},$$

qu'on trouve la substitution

$$x = \frac{3\theta}{2 - \theta^3},$$

pour la réduire à la forme rationnelle

$$y = \frac{3\theta^2}{2 - \theta^3}.$$

La considération de l'équation

$$F(x, y) = 0,$$

qui sert de définition aux fonctions algébriques, en général, et dont le premier membre est un polynôme entier par rapport à la variable et à la fonction, ouvre, comme on va le voir, une voie plus facile et plus féconde.

II. Soit l'équation

$$\begin{aligned} & Ay^m + Bxy^{m-1} + \ldots + Kx^{m-1}y + Lx^m \\ & \quad = ay^{m-1} + bxy^{m-2} + \ldots + hx^{m-2}y + kx^{m-1}, \end{aligned}$$

où A, B, ..., L, a, b, ..., k sont des constantes, et qu'on ne

(*) On doit à M. Tchebycheff d'avoir démontré que les conditions ainsi obtenues, comme suffisantes, sont nécessaires pour que l'intégrale

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

soit exprimable sous forme finie explicite par les fonctions algébriques et logarithmiques, en supposant m et n entiers.

peut, en général, résoudre par rapport à y; rien, néanmoins, n'est plus facile que d'en tirer x et y en fonction rationnelle d'une variable auxiliaire, car, en faisant $y = \theta x$, nous en concluons immédiatement

$$x = \frac{a\theta^{m-1} + b\theta^{m-2} + \ldots + k}{A\theta^m + B\theta^{m-1} + \ldots + L},$$

et, par suite,

$$y = \frac{a\theta^m + b\theta^{m-1} + \ldots + k\theta}{A\theta^m + B\theta^{m-1} + \ldots + L}.$$

Si nous supposons, en particulier,

$$y^3 - 2x^3 + 3xy = 0,$$

nous avons, en résolvant cette équation du troisième degré, l'exemple de l'irrationnelle qui vient d'être indiqué.

Soit, en second lieu,

$$(Ay^m + Bxy^{m-1} + \ldots + Kx^{m-1}y + Lx^m)^2$$
$$= (y^2 + \mu xy + \nu x^2)(ay^{m-2} + bxy^{m-3} + \ldots + hx^{m-2})^2;$$

la même substitution $y = tx$ donnera d'abord

$$x = \sqrt{t^2 + \mu t + \nu}\,\frac{at^{m-2} + bt^{m-3} + \ldots + h}{At^m + Bt^{m-1} + \ldots + L},$$

$$y = \sqrt{t^2 + \mu t + \nu}\,\frac{at^{m-1} + bt^{m-2} + \ldots + ht}{At^m + Bt^{m-1} + \ldots + L},$$

et, en supposant

$$t^2 + \mu t + \nu = (t - \alpha)(t - \beta),$$

il suffira, pour obtenir une transformation entièrement rationnelle, de prendre

$$t = \frac{\beta - \alpha\theta^2}{1 - \theta^2}.$$

Ainsi, dans cet exemple particulier

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

nous aurons d'abord

$$x = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t^2}, \quad y = \frac{t\sqrt{1 - t^2}}{1 + t^2},$$

puis, en faisant

$$t = \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2},$$

nous parviendrons à ces expressions

$$x = \frac{\theta^3-\theta}{\theta^4+1}\sqrt{-1}, \quad y = \frac{-\theta^3-\theta}{\theta^4+1}\sqrt{-1};$$

ou, si l'on remplace θ par $\theta\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{\theta^3+\theta}{\theta^4+1}, \quad y = \frac{-\theta^3+\theta}{\theta^4+1}.$$

Or, il serait beaucoup plus difficile d'y parvenir en partant de l'expression compliquée de y en x. Ces quelques résultats mettent sur la voie d'une recherche plus générale; étant donnée l'équation $F(x, y) = 0$, dont le premier membre est un polynôme entier en x et y, nous nous proposerons de reconnaître s'il est possible d'exprimer x et y en fonction rationnelle d'une variable auxiliaire. Ce sera ainsi résoudre, à l'égard des fonctions algébriques, la question que nous avons en vue, car ayant

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta),$$

l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

ou plutôt celle-ci

$$\int f(x, y)\,dx,$$

$f(x, y)$ étant rationnelle en x et y, deviendra, par l'introduction de la variable θ,

$$\int f[\varphi(\theta), \psi(\theta)]\varphi'(\theta)\,d\theta,$$

où l'on n'a plus sous le signe d'intégration qu'une expression rationnelle. Or, en suivant ainsi la voie du calcul, et faisant l'étude d'un procédé élémentaire d'intégration, nous sommes amené à l'un des points les plus intéressants de la Géométrie moderne, à la théorie des courbes algébriques auxquelles M. Cayley a donné le nom d'*unicursales*, et que M. Clebsch et M. Chasles ont enrichie de leurs découvertes. Je renverrai

aux travaux de ces illustres géomètres en me bornant, pour mon objet, aux considérations qui suivent (*).

III. Je dis en premier lieu que ces relations, qui définissent une courbe unicursale, à savoir

$$x = \varphi(\theta) = \frac{\beta\theta^n + \beta_1\theta^{n-1} + \ldots + \beta_n}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

$$y = \psi(\theta) = \frac{\gamma\theta^n + \gamma_1\theta^{n-1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

donnent entre x et y une équation du $n^{ième}$ degré. On sait, en effet, qu'en éliminant θ entre ces deux équations générales,

$$A\theta^n + A_1\theta^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$
$$B\theta^n + B_1\theta^{n-1} + \ldots + B_n = 0,$$

on est conduit à égaler à zéro un déterminant à n colonnes, dont les éléments sont composés linéairement avec les diverses quantités $A_iB_k - A_kB_i$. Or le terme xy disparaît dans la combinaison

$$(\alpha_i x - \beta_i)(\alpha_k y - \gamma_k) - (\alpha_k x - \beta_k)(\alpha_i y - \gamma_i),$$

de sorte que le premier membre de l'équation est composé d'une somme de produits de n facteurs, fonctions linéaires de x et y, ce qui démontre le résultat annoncé. Il s'agit maintenant de caractériser et de définir avec précision les équations algébriques qui ont cette origine. Voici, dans cette recherche importante, quelle est l'idée essentielle. J'observe qu'il est possible de satisfaire par un certain nombre de valeurs des inconnues θ et θ' aux conditions

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta'), \quad \psi(\theta) = \psi(\theta').$$

(*) *Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement. Application du principe de correspondance dans la théorie de ces courbes*, par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 579). *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe*, par M. Cayley (*Id.*, p. 586). *Voyez* surtout deux beaux et importants Mémoires de M. Clebsch, dans le *Journal de Crelle*, t. 64, p. 210, et t. 73, p. 189.

Désignant donc par $\theta = \theta_0$, $\theta' = \theta'_0$ un système de solutions, je pose, pour abréger,

$$\varphi(\theta_0) = \varphi(\theta'_0) = a,$$
$$\psi(\theta_0) = \psi(\theta'_0) = b,$$

et j'en conclus que chacune des différences $x - a$ et $y - b$ devant s'évanouir pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta'_0$, nous aurons, en désignant par $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ des polynômes en θ de degré $n - 2$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x - a &= \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta'_0)\Phi(\theta)}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n}, \\ y - b &= \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta'_0)\Psi(\theta)}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n}. \end{aligned} \right.$$

Au point de vue géométrique, et en considérant la courbe représentée par les équations

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta),$$

ces deux déterminations distinctes de θ, qui reproduisent les mêmes valeurs des coordonnées, nous donnent la notion des points doubles, puisque, évidemment, en faisant varier cette quantité de θ_0 à θ'_0, nous obtenons une portion de la courbe qui se coupe elle-même.

Au point de vue analytique, les équations (1) nous conduisent, pour notre but, à une conclusion importante. Elles montrent qu'en faisant $\theta = \theta_0 + t$, on aura, en développant suivant les puissances croissantes de t, des expressions de cette forme

$$x - a = mt + m't^2 + m''t^3 + \ldots,$$
$$y - b = nt + n't^2 + n''t^3 + \ldots,$$

et en posant

$$\theta = \theta'_0 + u,$$

nous obtiendrons de même

$$x - a = pu + p'u^2 + p''u^3 + \ldots,$$
$$y - b = qu + q'u^2 + q''u^3 + \ldots.$$

Soit donc $F(x, y) = 0$ l'équation rationnelle et entière du degré n qui résulte de l'élimination de θ. Cette équation deviendra identique en y remplaçant x et y par leurs valeurs en fonc-

tion de θ, ou par les développements en série, ordonnés suivant les puissances de t et de u. Or, la formule de Taylor donnant

$$F(x,y) = F(a,b) + (x-a)\frac{dF}{da} + (y-b)\frac{dF}{db} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^2F}{da^2} + \ldots,$$

les équations identiques en t et u seront

$$o = F(a,b) + \left(m\frac{dF}{da} + n\frac{dF}{db}\right)t$$
$$+ \left(m'\frac{dF}{da} + n'\frac{dF}{db} + \tfrac{1}{2}m^2\frac{d^2F}{da^2} + \ldots\right)t^2 + \ldots,$$
$$o = F(a,b) + \left(p\frac{dF}{da} + q\frac{dF}{db}\right)u$$
$$+ \left(p'\frac{dF}{da} + q'\frac{dF}{db} + \tfrac{1}{2}p^2\frac{d^2F}{da^2} + \ldots\right)u^2 + \ldots.$$

Elles conduisent à ces conditions

$$F(a,b) = o, \quad m\frac{dF}{da} + n\frac{dF}{db} = o, \quad p\frac{dF}{da} + q\frac{dF}{db} = o,$$

et l'on tire des deux dernières

$$\frac{dF}{da} = o, \quad \frac{dF}{db} = o,$$

puisqu'en général le déterminant $mq - np$ est différent de zéro. L'origine analytique de notre relation $F(x,y) = o$ a donc pour conséquence nécessaire que les égalités

$$F(x,y) = o, \quad \frac{dF}{dx} = o, \quad \frac{dF}{dy} = o$$

sont compatibles, et admettent pour solutions toutes les quantités $x = a$, $y = b$. Ces conditions, auxquelles nous nous trouvons ainsi amené, donnent lieu aux remarques suivantes.

IV. Les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la fonction définie par l'équation $F(x,y) = o$ s'obtiennent, en général, par les relations

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = o,$$
$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = o.$$

Mais si l'on suppose $x=a$ et, par suite, $y=b$, la première devient identique, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ disparaît de la seconde, qui donne alors pour $\frac{dy}{dx}$ deux valeurs en général distinctes. En revenant à la considération géométrique du lieu de l'équation

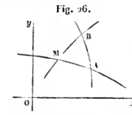
$$F(x,y)=0,$$

on voit ainsi qu'il existe, aux points tels que $x=a$, $y=b$, deux tangentes, et par conséquent deux branches de courbe, ce qui leur assigne le caractère que nous leur avons déjà reconnu de points doubles (*). Nous remarquerons surtout cette conséquence, bien digne d'attention au point de vue de l'Algèbre, que, si une autre équation $\mathfrak{F}(x,y)=0$ est aussi vérifiée pour $x=a$, $y=b$, on obtient, à l'égard du système

$$F(x,y)=0, \quad \mathfrak{F}(x,y)=0,$$

une solution double, puisque ces valeurs annulent le déterminant fonctionnel $\frac{dF}{dx}\frac{d\mathfrak{F}}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{d\mathfrak{F}}{dx}$. C'est d'ailleurs ce que la Géométrie montre immédiatement. Considérant, en effet,

Fig. 26.



deux courbes (*fig.* 26), l'une ayant un point double en M, et les deux branches MA, MB, l'autre étant quelconque et coupant la première en A et B; on reconnaît bien, en la déplaçant de manière que ces deux points d'intersection se réunissent en M, qu'alors deux solutions distinctes des deux équations viennent à coïncider.

(*) Si l'équation en $\frac{dy}{dx}$ a ses racines égales, ce qui suppose

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2=\frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^2F}{dy^2},$$

les deux branches ont la même tangente, et le point double devient un point de rebroussement; ce cas se présente à l'égard des courbes unicursales lorsque les quantités θ_0 et θ'_0 coïncident.

Et si cette seconde courbe a elle-même un point double en N (*fig.* 27) et, par suite, deux branches coupant la première en quatre points A, B, C, D, ces quatre intersections, en la déplaçant de manière à faire coïncider M et N, viendront se réunir en une seule. Il en résulte qu'en éliminant l'une des inconnues, y par exemple, entre les équations des deux courbes

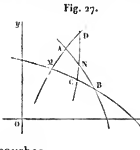


Fig. 27.

$$F(x, y) = 0, \quad \mathcal{F}(x, y) = 0,$$

l'équation finale en x renfermera, dans le premier cas, le facteur $x - a$ élevé au carré, et, dans le second cas, le même facteur élevé à la quatrième puissance.

V. Je reviens aux courbes unicursales, représentées, comme nous l'avons dit, par les relations

$$x = \varphi(\theta) = \frac{\beta\theta^n + \beta_1\theta^{n-1} + \ldots + \beta_n}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

$$y = \psi(\theta) = \frac{\gamma\theta^n + \gamma_1\theta^{n-1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

afin d'établir cette proposition fondamentale pour notre objet, qu'elles ont $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.

A cet effet, j'observe que tout système de solutions $\theta = \theta_0$, $\theta' = \theta'_0$ des équations

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta'), \quad \psi(\theta) = \psi(\theta')$$

en donne un second en permutant θ et θ', à savoir : $\theta = \theta'_0$, $\theta' = \theta_0$; mais qu'aux deux ne correspond qu'un point double, ayant pour coordonnées

$$a = \varphi(\theta_0) = \varphi(\theta'_0),$$
$$b = \psi(\theta_0) = \psi(\theta'_0).$$

Je prendrai, en conséquence, pour inconnues auxiliaires les quantités $\theta + \theta' = -t$ et $\theta\theta' = u$, que j'introduirai facilement dans les équations proposées, en prenant les fonctions rationnelles $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ décomposées en fractions simples, sous

la forme

$$\varphi(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{A}{\theta - a} + \frac{B}{\theta - b} + \ldots + \frac{L}{\theta - l} = \frac{\beta}{\alpha} + \sum \frac{A}{\theta - a},$$

$$\psi(\theta) = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\mathcal{A}}{\theta - a} + \frac{\mathcal{B}}{\theta - b} + \ldots + \frac{\mathcal{L}}{\theta - l} = \frac{\gamma}{\alpha} + \sum \frac{\mathcal{A}}{\theta - a}.$$

Après avoir supprimé le facteur $\theta' - \theta$, et observant que

$$(\theta - a)(\theta' - a) = a^2 + at + u,$$

elles deviennent, en effet,

$$\sum \frac{A}{a^2 + at + u} = 0, \quad \sum \frac{\mathcal{A}}{a^2 + at + u} = 0,$$

de sorte que, sous forme entière, elles sont du degré $n - 1$, et, par suite, admettront un nombre de solutions égal à $(n-1)^2$. Mais, en chassant les dénominateurs, on obtient, pour les premiers membres, des combinaisons linéaires des produits $n - 1$ à $n - 1$ des quantités

$$a^2 + at + u, \quad b^2 + bt + u, \ldots, \quad l^2 + lt + u;$$

par conséquent, elles sont satisfaites en annulant à la fois deux quelconques d'entre elles, ce qui donne $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions telles que $t = -(a+b)$, $u = ab$, $t = -(a+c)$, $u = ac, \ldots$, auxquelles correspondent les valeurs $\theta = a$, $\theta = b, \ldots$, qui rendent x et y infinis. Or, en supprimant ces solutions, il reste, pour le nombre des valeurs des inconnues, et par conséquent pour le nombre même des points doubles, la différence

$$(n-1)^2 - \tfrac{1}{2}n(n-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

comme nous nous étions proposé de l'établir.

VI. La proposition réciproque établie par M. Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 44) conduit à la solution complète de la question de calcul intégral que nous nous sommes proposée. M. Chasles a donné ensuite pour le même objet le théorème suivant (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 584) :

« *Si une courbe* C_n *d'ordre* n *a* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *points doubles, on peut déterminer ses points individuellement au moyen*

d'un faisceau de courbes d'ordre $n-1$, qui ont $n-2$ points doubles communs avec pareil nombre de points doubles de C_n, et $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ points simples coïncidant avec les autres points doubles de C_n, et qui passent toutes par un autre point fixe de C_n. »

L'illustre géomètre l'établit comme il suit :

« En effet, un faisceau de courbes d'ordre $n-1$ est déterminé par $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1=\dfrac{n^2+n-4}{2}$ points, base du faisceau. Or les $n-2$ points doubles équivalent à $3(n-2)$ points simples, qui, avec les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$ points par lesquels passent les courbes d'ordre $n-1$ donnent

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n+2)-1.$$

Ainsi le faisceau est déterminé.

» Ces courbes, d'ordre $n-1$, coupent C_n en $n(n-1)$ points, dont $4(n-2)$ se trouvent aux $n-2$ premiers points doubles, $(n-2)(n-3)$ aux autres points doubles, et un au point fixe pris sur C_n, ce qui fait

$$4(n-2)+(n-2)(n-3)+1=n(n-1)-1.$$

Donc les courbes n'ont qu'un point d'intersection variable; ce qui démontre le théorème (*). »

Ajoutons seulement ceci, au point de vue du calcul.

VII. Étant proposée la relation, de degré n, $F(x,y)=0$, on commencera par déterminer tous les systèmes de valeurs de x et y qui donnent à la fois

$$F(x,y)=0,\quad \frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0;$$

puis, en les supposant au nombre de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, on les

---

(*) M. Chasles emploie encore un faisceau d'ordre $n-2$ dans une seconde proposition, dont voici l'énoncé : *Les courbes du faisceau auraient pour base δ points doubles coïncidant avec des points doubles de C_n, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ points simples coïncidant avec les autres points doubles de C_n, et $n-3-2\delta$ autres points simples pris sur C_n.* M. Clebsch avait donné la même proposition dans le cas particulier de $\delta=0$.

partagera en deux groupes : l'un qui en comprend $n-2$,

$$x=a,\quad y=b,\quad x=a',\quad y=b',\ldots,$$

et l'autre $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$,

$$x=g,\quad y=h,\quad x=g',\quad y=h',\ldots.$$

Cela fait, nous posons, entre les coefficients d'une équation générale $\mathfrak{F}(x,y)=0$ de degré $n-1$, les trois conditions

$$\mathfrak{F}(x,y)=0,\quad \frac{d\mathfrak{F}}{dx}=0,\quad \frac{d\mathfrak{F}}{dy}=0,$$

pour les $n-2$ valeurs

$$x=a,\quad y=b,\quad x=a',\quad y=b',\ldots,$$

puis l'équation unique $\mathfrak{F}(x,y)=0$, d'une part, pour

$$x=g,\quad y=h,\quad x=g',\quad y=h',\ldots,$$

et, en dernier lieu, pour le système $x=x_0$, $y=y_0$, remplissant la condition $F(x_0,y_0)=0$, et qui contient, par suite, une quantité arbitraire. Les coefficients de l'équation du faisceau étant déterminés par ces diverses équations du premier degré en fonction linéaire d'une variable θ, j'obtiendrai les quantités $x=\varphi(\theta)$, $y=\psi(\theta)$ en calculant, d'une part, la somme des valeurs de x, et, de l'autre, la somme des valeurs de y, qui satisfont à la fois aux deux équations

$$F(x,y)=0,\quad \mathfrak{F}(x,y)=0.$$

La première, en ayant égard à l'ordre de multiplicité des solutions $x=a$, $x=a'$,..., et $x=g$, $x=g'$,..., sera

$$x+4(a+a'+\ldots)+2(g+g'+\ldots)+x_0,$$

et la seconde

$$y+4(b+b'+\ldots)+2(h+h'+\ldots)+y_0;$$

or je dis qu'elles sont représentées par des fractions rationnelles de même dénominateur, dont les termes sont des polynômes de degré n en θ.

Considérons d'abord l'équation finale en x, qui est, en dé-

signant par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les racines de l'équation $F(x, y) = 0$,

$$\mathfrak{F}(x, y_1) \times \mathfrak{F}(x, y_2) \times \ldots \times \mathfrak{F}(x, y_n) = 0.$$

Voici succinctement la méthode employée par M. Liouville dans son beau Mémoire sur l'élimination (*Journal de Mathématiques*, année 1841, p. 345). Elle consiste à développer les divers facteurs $\mathfrak{F}(x, y_1)$, $\mathfrak{F}(x, y_2)$,... suivant les puissances descendantes de x, en limitant chaque développement à ses deux termes les plus élevés qui seront seuls nécessaires. J'emploie à cet effet les développements des racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bornés à leur partie entière, que donne la théorie des asymptotes. Si l'on fait

$$F(x, y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$,... étant des polynômes de degrés n, $n-1$,..., et qu'on désigne par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on aura ainsi

$$y_1 = \alpha x - \frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}, \quad y_2 = \beta x - \frac{\varphi_1(\beta)}{\varphi'(\beta)}, \ldots, \quad y_n = \lambda x - \frac{\varphi_1(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

Or, en posant, comme tout à l'heure,

$$\mathfrak{F}(x, y) = x^{n-1} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \psi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

un calcul facile donne

$$\mathfrak{F}(x, y_1) = x^{n-1}\psi(\alpha) - x^{n-2}\frac{\psi'(\alpha)\varphi_1(\alpha) - \psi_1(\alpha)\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} + \ldots,$$

$$\mathfrak{F}(x, y_2) = x^{n-1}\psi(\beta) - x^{n-2}\frac{\psi'(\beta)\varphi_1(\beta) - \psi_1(\beta)\varphi'(\beta)}{\varphi'(\beta)} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous en conclurons, en multipliant membre à membre, divisant par $\psi(\alpha)\psi(\beta)\ldots\psi(\lambda)$, et posant, pour abréger,

$$\Theta(x) = \frac{\psi'(x)\varphi_1(x) - \psi_1(x)\varphi'(x)}{\varphi'(x)\psi(x)},$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x, y_1)\mathfrak{F}(x, y_2)\ldots\mathfrak{F}(x, y_n)}{\psi(\alpha)\psi(\beta)\ldots\psi(\lambda)}$$
$$= x^{n^2-n} - x^{n^2-n-1}[\Theta(\alpha) + \Theta(\beta) + \ldots + \Theta(\lambda)] + \ldots.$$

Ce résultat obtenu, nous en déduirons ce qui concerne l'équation finale en y, en observant que, si l'on fait, pour un instant,

$$F(x, y) = y^n \Phi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{n-1}\Phi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots,$$

$$\mathfrak{F}(x, y) = y^{n-1}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{n-2}\Psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots,$$

il suffira d'y remplacer à la fois $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ par $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Psi(x)$, $\Psi_1(x)$, et les racines $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ par celles de l'équation $\Phi(x) = 0$ qui sont leurs inverses, car on a évidemment

$$\Phi(x) = x^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \Phi_1(x) = x^{n-1}\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\Psi(x) = x^{n-1}\psi\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \Psi_1(x) = x^{n-2}\psi_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela étant, le calcul le plus facile donne, pour l'équation cherchée,

$$y^{n^2-n} - y^{n^2-n-1}\left[(n-1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} + \alpha\Theta(\alpha) + \beta\Theta(\beta) + \ldots + \lambda\Theta(\lambda)\right] + \ldots = 0,$$

où ε et ε_1 désignent les coefficients de x^n et x^{n-1} dans les polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$.

En employant, pour abréger, le signe $\sum$, nous aurons donc ces relations qui déterminent x et y en fonction de θ, savoir :

$$y + 4(a + a' + \ldots) + 2(g + g' + \ldots) + x_0 = \sum\Theta(\alpha),$$

$$y + 4(b + b' + \ldots) + 2(h + h' + \ldots) + y_0 = (n-1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} + \sum\alpha\Theta(\alpha).$$

Les quantités α qui y figurent sont indépendantes de θ, et la fonction $\Theta(x) = \dfrac{\psi'(x)\varphi_1(x) - \psi_1(x)\varphi'(x)}{\varphi'(x)\psi(x)}$ contient cette variable au premier degré dans $\psi(x)$ et $\psi_1(x)$, de sorte que les seconds membres se réduiront à deux fractions de même dénominateur, et dont les numérateurs, ainsi que ce dénominateur commun, seront des polynômes du $n^{ième}$ degré en θ; il en sera de même, par conséquent, pour x et y. Tels sont

les résultats analytiques auxquels conduit le théorème de M. Clebsch pour remplacer, toutes les fois qu'il est possible, l'équation

$$F(x, y) = 0$$

par le système

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta),$$

où la variable indépendante et l'irrationnelle algébrique sont des fonctions rationnelles d'une nouvelle indéterminée. Nous connaissons ainsi le changement de variable qui réduit l'intégrale

$$\int f(x, y)\,dx$$

à celle d'une fonction rationnelle

$$\int f[\varphi(\theta), \psi(\theta)]\,\varphi'(\theta)\,d\theta,$$

et c'est là un des résultats les plus importants de la méthode d'intégration par substitution ; il nous reste à montrer l'emploi, beaucoup plus restreint, de cette méthode à l'égard des fonctions transcendantes.

VIII. Je considérerai seulement ces deux expressions

$$\int f(e^{ax})\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

la fonction f étant toujours rationnelle par rapport à la quantité unique ou aux quantités qui y entrent. En faisant d'abord

$$e^{ax} = \theta,$$

d'où

$$x = \frac{1}{a}\log\theta \quad \text{et} \quad dx = \frac{d\theta}{a\theta},$$

on aura

$$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(\theta)\,\frac{d\theta}{\theta};$$

ce qui ramène l'intégrale de la fonction transcendante à celle d'une fraction rationnelle. La même conclusion s'obtient dans le second cas en posant

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \theta;$$

car on en déduit

$$\sin x = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \quad \cos x = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \quad dx = \frac{2\,d\theta}{1+\theta^2},$$

et, par conséquent,

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2\theta}{1+\theta^2}, \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right)\frac{2\,d\theta}{1+\theta^2}.$$

On aurait pu remarquer encore qu'ayant

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

l'expression $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction rationnelle de l'exponentielle imaginaire $e^{x\sqrt{-1}}$, de sorte qu'en posant

$$e^{x\sqrt{-1}} = t,$$

d'où

$$\sin x = \frac{t^2-1}{2t\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{t^2+1}{2t},$$

on aurait transformé $f(\sin x, \cos x)$ en fonction rationnelle de t. Mais la première substitution, outre l'avantage d'être réelle, conduit dans plusieurs cas importants, comme nous le verrons plus tard, à des calculs plus faciles. Il est préférable alors de poser, comme on l'a fait,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \theta;$$

on voit d'ailleurs immédiatement que t et θ sont liés par cette relation très-simple

$$t = \frac{1+\theta\sqrt{-1}}{1-\theta\sqrt{-1}}.$$

Intégration par parties.

I. Après le changement de variables, le procédé analytique le plus important, pour la détermination des intégrales, consiste dans ce qu'on nomme l'*intégration par parties*, et voici en quoi il consiste. En désignant par U et V deux fonc-

tions quelconques de x, on tire de l'identité

$$\frac{dUV}{dx} = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$$

la formule

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU,$$

qui ramène l'intégrale $\int U\,dV$ à une autre $\int V\,dU$. Nous trouvons ainsi, par exemple,

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\,d\log x = x\log x - \int dx = x(\log x - 1).$$

Mais pour présenter dans son acception la plus générale et la plus simple le procédé de l'intégration par parties, nous établirons la formule suivante. Posons, pour abréger,

$$\Theta = U\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{dU}{dx}\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-2}V}{dx^{n-2}} - \ldots + (-1)^n\frac{d^nU}{dx^n}V.$$

Je dis que l'on aura

$$\int U\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}dx = \Theta - (-1)^n\int V\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}dx.$$

Effectivement, si l'on différentie cette équation, il vient

$$U\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} = \frac{d\Theta}{dx} - (-1)^nV\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{d\Theta}{dx} = U\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} + (-1)^nV\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}},$$

ce qui se vérifie immédiatement; car on a

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dx} = \frac{dU}{dx}\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}V\\ + U\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} - \frac{dU}{dx}\frac{d^nV}{dx^n} + \ldots + (-1)^n\frac{d^nU}{dx^n}\frac{dV}{dx},\end{aligned}$$

égalité où tous les termes se détruisent, sauf le dernier de la première ligne et le premier de la seconde ligne, ce qui donne bien le résultat annoncé.

Comme application, nous allons considérer l'intégrale

$\int e^{ax} F(x)\,dx$, où $F(x)$ sera supposé un polynôme entier en x et du degré n. Prenant donc, d'une part,

$$U = F(x),$$

et de l'autre

$$V = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}},$$

ce qui donne

$$\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} = e^{ax}, \quad \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = 0;$$

on en conclut immédiatement

$$\int e^{ax} F(x)\,dx = \Theta + C,$$

et l'on a d'ailleurs

$$\Theta = F(x)\frac{e^{ax}}{a} - F'(x)\frac{e^{ax}}{a^2} + \ldots + (-1)^n F^{(n)}(x)\frac{e^{ax}}{a^{n+1}}$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\left[F(x) - \frac{F'(x)}{a} + \ldots + (-1)^n \frac{F^{(n)}(x)}{a^n}\right].$$

Ce résultat conduit à un autre plus général concernant l'intégrale

$$\int F(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\,dx,$$

dans laquelle on suppose la fonction F entière par rapport à x et aux exponentielles $e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx}$. Car cette fonction, se composant alors d'une somme de produits de puissances entières et positives, des quantités x, e^{ax}, $e^{bx}, \ldots, e^{kx}$ sera de la forme

$$F = \Sigma A x^m (e^{ax})^n (e^{bx})^p \ldots (e^{kx})^s = \Sigma A x^m e^{(na+pb+\ldots sk)x},$$

de sorte que chaque terme s'intègre comme on vient de le voir. Ajoutons que les constantes $a, b, \ldots, k$ peuvent être réelles ou imaginaires; car, en supposant, par exemple,

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

on aura

$$e^{ax} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x),$$

ce qui, permettant de mettre la fonction sous le signe $\int$ sous

la forme

$$F = F_0(x) + \sqrt{-1}\,F_1(x),$$

nous placera dans la condition du § I. C'est ainsi, par exemple, que de l'intégrale

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a},$$

on tirera

$$\int e^{ax}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)\,dx = \frac{e^{ax}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2},$$

et, par conséquent,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Semblablement, si l'on change la constante a en $a\sqrt{-1}$, dans l'expression obtenue plus haut

$$\int e^{ax}\,F(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[F(x) - \frac{F'(x)}{a} + \ldots + (-1)^n \frac{F^n(x)}{a^n}\right],$$

on en conclura ces deux résultats, faciles à obtenir directement, savoir :

$$\int \cos ax\,F(x)\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[F(x) - \frac{F''(x)}{a^2} + \frac{F^{\text{iv}}(x)}{a^4} - \ldots\right]$$

$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{F'(x)}{a} - \frac{F'''(x)}{a^3} + \frac{F^{\text{v}}(x)}{a^5} - \ldots\right],$$

$$\int \sin ax\,F(x)\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{F'(x)}{a} - \frac{F'''(x)}{a^3} + \frac{F^{\text{v}}(x)}{a^5} - \ldots\right]$$

$$- \frac{\cos ax}{a}\left[F(x) - \frac{F''(x)}{a^2} + \frac{F^{\text{iv}}(x)}{a^4} - \ldots\right].$$

V. Nous joindrons enfin à ces intégrales les suivantes

$$\int F(x, \log x)\,dx, \quad \int F(x, \text{arc}\sin x)\,dx, \quad \int F(x, \text{arc}\cos x)\,dx;$$

en faisant, en effet, tour à tour,

$$\log x = z, \quad \arcsin x = z, \quad \arccos x = z,$$

elles deviennent

$$\int F(e^z, z)\, e^z\, dz, \quad \int F(\sin z, z) \cos z\, dz, \quad \int F(\cos z, z) \sin z\, dz,$$

et rentrent, par conséquent, dans la formule du § IV pour des valeurs réelles ou imaginaires des constantes $a, b, \ldots, k$.

Tels sont donc jusqu'ici les divers types de fonctions pour lesquels on possède une méthode sûre d'intégration sous forme finie explicite. Bien d'autres, nous devons le dire, ne rentrent point dans ces méthodes; ainsi, par exemple, en posant

$$u = x \sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x \cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\, dx}{u^2} = \frac{v}{u},$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{b x^2\, dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv}.$$

Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\, dx}{[a + (ax + b) \tang x]^2} = \frac{\tang x}{a + (ax + b) \tang x}$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation.

Ce n'est pas toutefois aux seules fonctions algébriques et transcendantes précédemment considérées que se limite le calcul intégral, et bientôt nous allons voir le champ s'agrandir, en même temps que nous approfondirons les méthodes de calcul dont nous avons donné seulement une première esquisse. A cet égard, nous commencerons par le cas le plus simple, celui des fonctions rationnelles, que nous traiterons avec quelque étendue, en y rattachant plusieurs notions importantes d'Analyse.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

Soient $F(x)$ et $F_1(x)$ deux polynômes entiers; en posant, pour mettre en évidence l'ordre de multiplicité des divers facteurs,

$$F(x) = (x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}\ldots(x-l)^{\lambda+1},$$

et admettant pour simplifier que le degré du numérateur soit moindre que le degré de $F(x)$, la décomposition en fractions simples donne la formule générale

$$\begin{aligned}\frac{F_1(x)}{F(x)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}}\\ &+ \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta+1}}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{L}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^{\lambda+1}},\end{aligned}$$

ou, pour abréger l'écriture (*),

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \sum \frac{A}{x-a} + \sum \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}.$$

On en déduit immédiatement cette expression de l'intégrale de toute fonction rationnelle

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \sum A\log(x-a) - \sum \frac{A_1}{x-a} - \ldots - \frac{1}{n}\sum \frac{A_n}{(x-a)^n};$$

où l'on voit figurer une partie transcendante et une partie algébrique qui donnent lieu aux remarques suivantes.

I. Nous observerons d'abord qu'en supposant réels les polynômes $F(x)$ et $F_1(x)$, les racines du dénominateur peuvent être imaginaires, de sorte qu'il est nécessaire de mettre le résultat obtenu sous une forme explicitement réelle. Or on

(*) On supposera que n soit le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et qu'on attribue des valeurs nulles à ceux des numérateurs $A_n, B_n, \ldots, L_n$, dont les indices surpasseraient respectivement $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

sait que les racines imaginaires seront conjuguées deux à deux ; de plus, qu'elles seront de même ordre de multiplicité, et qu'en les désignant par a et b les numérateurs des fractions simples correspondantes

$$\frac{A_i}{(x-a)^{i+1}}, \quad \frac{B_i}{(x-b)^{i+1}}$$

seront respectivement exprimés de la même manière en fonction rationnelle de a et b. Ce seront donc aussi des quantités imaginaires conjuguées, et les termes qui en résultent dans la partie algébrique de l'intégrale, à savoir

$$-\frac{1}{i}\frac{A_i}{(x-a)^i}, \quad -\frac{1}{i}\frac{B_i}{(x-b)^i},$$

donnent, par les réductions ordinaires, une somme réelle. Mais, dans la partie transcendante, il sera nécessaire, pour effectuer cette réduction, d'employer l'expression des logarithmes des quantités imaginaires

$$\log\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}\sqrt{-1},$$

et, en faisant

$$\begin{aligned} a &= \alpha+\beta\sqrt{-1}, & A &= P+Q\sqrt{-1}, \\ b &= \alpha-\beta\sqrt{-1}, & B &= P-Q\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

on trouvera facilement

$$A\log(x-a)+B\log(x-b) = P\log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] - 2Q\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Ce résultat peut également s'obtenir par l'intégration directe de la somme des fractions imaginaires conjuguées

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Écrivant, en effet,

$$\int\frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = P\int\frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} - 2Q\int\frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

on a d'abord

$$\int \frac{2(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{d[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \log[(x-\alpha)^2+\beta^2];$$

faisant ensuite $x - \alpha = \beta z$, il viendra

$$\int \frac{\beta dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tang} z,$$

et, par suite,

$$\int \frac{\beta dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\alpha}{\beta},$$

de sorte que nous aurons, comme précédemment,

$$\int \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = P\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] - 2Q\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

II. La formule

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \sum A\log(x-a) - \sum \frac{A_1}{x-a} - \ldots - \frac{1}{n}\sum \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

montre que le second membre sera simplement algébrique, lorsque les constantes A, B,..., L seront toutes nulles. Ces conditions, qui sont suffisantes, sont évidemment nécessaires; car, si l'on égale pour un instant à une fraction rationnelle la quantité $\Sigma A\log(x-a) = \int \sum \frac{A}{x-a}dx$, et qu'on prenne la dérivée de cette fonction rationnelle après l'avoir décomposée en fractions simples, on fera ainsi disparaître toutes les fractions partielles dont les dénominateurs sont du premier degré. On ne pourra donc reproduire l'expression $\sum \frac{A}{x-a}$, la décomposition en fractions simples n'étant possible que d'une seule manière.

Remarquons aussi que la partie algébrique de l'intégrale est de la forme $\frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}$, $\mathfrak{F}(x)$ étant un polynôme entier qu'on peut facilement obtenir, comme on va voir, à l'aide des développements en série suivant les puissances décroissantes de la variable, de l'intégrale et de la partie

transcendante. On forme le premier en supposant qu'on ait, par la division algébrique,

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\omega}{x} + \frac{\omega_1}{x^2} + \frac{\omega_2}{x^3} + \ldots;$$

de là, nous tirons, en effet, en intégrant les deux membres,

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)} dx = \omega \log x - \frac{\omega_1}{x} - \frac{\omega_2}{2x^2} - \ldots.$$

Quant au second, il suffit d'employer la série élémentaire

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots,$$

pour en conclure

$$\sum \frac{A}{x-a} = \frac{\Sigma A}{x} + \frac{\Sigma A a}{x^2} + \frac{\Sigma A a^2}{x^3} + \ldots,$$

puis, en intégrant,

$$\Sigma A \log(x-a) = \Sigma A \log x - \frac{\Sigma A a}{x} - \frac{\Sigma A a^2}{2x^2} - \ldots.$$

Nous obtenons ainsi la relation

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda} = (\Sigma A - \omega)\log x + \frac{\omega_1 - \Sigma A a}{x} + \frac{\omega_2 - \Sigma A a^2}{2x^2} + \ldots,$$

où le terme logarithmique, dans le second membre, doit nécessairement disparaître, un tel terme ne pouvant provenir du développement d'une fonction rationnelle suivant les puissances descendantes de la variable. Nous avons donc la condition

$$\Sigma A = \omega,$$

dont il est souvent fait usage, surtout dans le cas où le degré de $F_1(x)$ étant inférieur de deux unités à celui de $F(x)$, on a $\omega = 0$ (*).

(*) Les quantités A, B,..., L étant les résidus de la fonction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ correspondant aux diverses racines du dénominateur, la somme ΣA a reçu de Cauchy la dénomination de *résidu intégral* de cette fonction.

Soit maintenant, pour abréger,

$$\frac{\omega_n - \sum A a^n}{n} = \pi_n,$$

le polynôme $\mathfrak{F}(x)$, que nous nous proposons de déterminer, sera donné par cette expression

$$\mathfrak{F}(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \left(\frac{\pi_1}{x} + \frac{\pi_2}{x^2} + \frac{\pi_3}{x^3} + \ldots\right),$$

où il est nécessaire que les termes en nombre infini contenant x en dénominateur se détruisent, de sorte qu'il suffira d'en extraire la partie entière. Soit, à cet effet,

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m;$$

on trouve sur-le-champ

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) = {} & \pi_1 (x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}) \\ & + \pi_2 (x^{m-2} + p_1 x^{m-3} + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + \pi_{m-1}(x + p_1) + \pi_m,\end{aligned}$$

et nous voyons qu'on pourra s'arrêter dans les développements de l'intégrale et de la partie transcendante aux termes en $\frac{1}{x^m}$.
Mais nous allons reprendre, par une méthode plus approfondie, cette recherche importante de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{F_1(x)}{F(x)} dx$. Nous nous proposons, en effet, de la déterminer de manière à obtenir la somme effectuée des fractions simples données par la formule générale, de sorte que la connaissance des racines de l'équation $F(x) = 0$ ne sera plus nécessaire que pour former la partie transcendante $\sum A \log(x-a)$.

III. Dans ce but, on commencera par mettre le dénominateur au moyen de la théorie des racines égales, sous la forme

$$F(x) = N^{n+1} P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1},$$

N, P, Q, S étant des polynômes tels, que l'équation

$$NPQ \ldots S = 0$$

n'ait que des racines simples. Nous remplaçons ensuite la décomposition en fractions simples par celle-ci

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}} + \frac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}} + \frac{\mathfrak{Q}}{Q^{q+1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{S}}{S^{s+1}},$$

où $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$,..., $\mathfrak{S}$ sont des fonctions entières qu'on obtient par la méthode suivante.

Je me fonderai sur le procédé algébrique que je vais rappeler, et par lequel, étant donnés deux polynômes premiers entre eux U et V, on peut en déterminer deux autres A et B, tels qu'on ait

$$AV + BU = 1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{A}{U} + \frac{B}{V} = \frac{1}{UV}.$$

Effectuons sur U et V la recherche du plus grand commun diviseur de manière à obtenir ces relations, où Q, Q_1, Q_2,... sont les quotients, et R, R_1, R_2,... les restes successifs, savoir

$$\begin{aligned} U &= VQ + R, \\ V &= RQ_1 + R_1, \\ R &= R_1 Q_2 + R_2. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ces valeurs qu'on en tire, savoir

$$\begin{aligned} R &= U - VQ, \\ R_1 &= V(1 + QQ_1) - UQ_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

montrent qu'un reste de rang quelconque s'exprime au moyen des polynômes U et V par une combinaison de la forme

$$AV + BU,$$

où A et B sont des fonctions entières. Or le dernier de ces restes est, dans l'hypothèse admise, une simple constante, ce qui démontre et donne le moyen de former la relation annoncée.

Cela posé, soit

$$U = N^{n+1}, \quad V = P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1};$$

nous pouvons écrire

$$\frac{1}{UV} = \frac{1}{F(x)} = \frac{A}{N^{n+1}} + \frac{B}{P^{p+1}Q^{q+1}\ldots S^{s+1}},$$

puis, en multipliant par $F_1(x)$, et faisant $\mathfrak{N} = AF_1(x)$,

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}} + \frac{BF_1(x)}{P^{p+1}Q^{q+1}\ldots S^{s+1}}.$$

Maintenant il est clair qu'en opérant sur la fraction

$$\frac{BF_1(x)}{P^{p+1}Q^{q+1}\ldots S^{s+1}}$$

comme sur la proposée, on la décomposera pareillement en un terme $\dfrac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}}$ et une nouvelle fraction dont le dénominateur ne renfermera que les facteurs de $F(x)$ autres que N^{n+1} et P^{p+1}. Continuant donc les mêmes opérations jusqu'à l'épuisement complet de ces facteurs, on réalisera ainsi la décomposition que nous voulions obtenir de $\dfrac{F_1(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}} + \frac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{S}}{S^{s+1}}.$$

On en tire

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}}\,dx + \int \frac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}}\,dx + \ldots + \int \frac{\mathfrak{S}}{S^{s+1}}\,dx,$$

les intégrations portant, comme on voit, sur des expressions toutes semblables, qu'on traite de la manière suivante.

IV. J'observe que N, n'ayant pas de facteurs multiples, est premier avec la dérivée N'; de sorte qu'on pourra déterminer deux polynômes A et B remplissant la condition

$$BN - N'A = 1.$$

Cela étant, nous formerons deux séries de fonctions entières

$$V_0, \quad V_1, \ldots, \; V_{n-1},$$
$$\mathfrak{N}_1, \; \mathfrak{N}_2, \ldots, \; \mathfrak{N}_n;$$

par ces relations, où $K, K_1, \ldots, K_{n-1}$ sont des polynômes entiè-

rement arbitraires, savoir

$$n V_0 = A \mathfrak{M} - NK,$$
$$(n-1) V_1 = A \mathfrak{M}_1 - NK_1,$$
$$(n-2) V_2 = A \mathfrak{M}_2 - NK_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$V_{n-1} = A \mathfrak{M}_{n-1} - NK_{n-1},$$

puis, en second lieu,

$$\mathfrak{M}_1 = B \quad \mathfrak{M} - N'K \quad - V'_0,$$
$$\mathfrak{M}_2 = B \quad \mathfrak{M}_1 - N'K_1 \quad - V'_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathfrak{M}_n = B \mathfrak{M}_{n-1} - N'K_{n-1} - V'_{n-1}.$$

Je vais maintenant prouver qu'en faisant

$$U = \mathfrak{M}_n,$$
$$V = V_0 + NV_1 + N^2 V_2 + \dots + N^{n-1} V_{n-1},$$

on a identiquement

$$\frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} = \frac{U}{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V}{N^n}\right),$$

d'où

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} dx = \int \frac{U}{N} dx + \frac{V}{N^n},$$

de sorte que $\frac{V}{N^n}$ est la partie algébrique de l'intégrale, et $\int \frac{U}{N} dx$ la partie transcendante.

Éliminons, à cet effet, A et B entre les trois égalités

$$(n-i) V_i = A \mathfrak{M}_i - NK_i,$$
$$\mathfrak{M}_{i+1} = B \mathfrak{M}_i - N'K_i - V'_i,$$
$$1 = BN - N'A,$$

ce qui donne

$$N \mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{M}_i + (n-i) N' V_i - N V'_i.$$

Nous mettrons cette relation sous la forme suivante

$$\frac{\mathfrak{M}_i}{N^{n-i+1}} - \frac{\mathfrak{M}_{i+1}}{N^{n-i}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{V_i}{N^{n-i}}\right),$$

et, supposant ensuite $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, nous en conclurons, en ajoutant membre à membre,

$$\frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}} - \frac{\mathfrak{N}_n}{N} = \frac{d}{dx}\left(\frac{V_0}{N^n} + \frac{V_1}{N^{n-1}} + \ldots + \frac{V_{n-1}}{N}\right),$$

ce qui fait bien voir qu'on satisfait à la condition proposée

$$\frac{\mathfrak{N}}{N^{n+1}} = \frac{U}{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V}{N^n}\right)$$

par les expressions

$$U = \mathfrak{N}_n,$$

$$V = V_0 + NV_1 + N_2V^2 + \ldots + N^{n-1}V_{n-1},$$

comme il s'agissait de le démontrer.

J'ai dit que les polynômes K, K_1, K_{n-1} étaient arbitraires; on pourra donc en disposer de manière que les degrés de V_0, V_1, .., V_{n-1} soient moindres que le degré de N; on pourra aussi les supposer tous nuls, ce qui donne, par exemple,

$$nV_0 = \mathfrak{N}A,$$

$$n(n-1)V_1 = \mathfrak{N}A(nB - A') - \mathfrak{N}'A^2,$$

....

Ces deux suppositions se concilient dans le cas de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}$, que je choisis comme application de la méthode. Nous aurons alors

$$N = x^2 - 1, \quad N' = 2x,$$

$$A = -\frac{x}{2}, \quad B = -1,$$

puis successivement

$$nV_0 = -\frac{x}{2},$$

$$(n-1)V_1 = +\frac{2n-1}{2n}\frac{x}{2},$$

$$(n-2)V_2 = -\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\frac{x}{2},$$

$$(n-3)V_3 = +\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)}\frac{x}{2},$$

....

$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{2n-1}{2n},$$

$$\mathfrak{N}_2 = +\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)},$$

$$\mathfrak{N}_3 = -\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)},$$

.................................,

d'où ces valeurs, qu'on retrouvera bientôt par une autre voie,

$$U = \mathfrak{N}_n = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2},$$

$$V = V_0 + NV_1 + N^2V_2 + \ldots + N^{n-1}V_{n-1}$$

$$= -\frac{x}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2n-1}{2n}\frac{x^2-1}{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\frac{(x^2-1)^2}{n-2} - \ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n(2n-2)\ldots 4}(x^2-1)^{n-1}\right].$$

De l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$.

I. Des notions importantes d'Analyse se rattachent à cette expression, qui va nous servir d'exemple pour l'application des méthodes générales d'intégration des fonctions rationnelles. J'observe d'abord qu'on aura pour la partie transcendante et la partie algébrique ces expressions

$$A \log(x-a) + B \log(x+a), \quad \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n},$$

et que, dans la série

$$\frac{\omega}{x} + \frac{\omega_1}{x^2} + \frac{\omega_2}{x^3} + \ldots,$$

les coefficients ω, $\omega_1, \ldots$, ω_{2n} s'évanouissent. En écrivant, en effet,

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{-(n+1)},$$

la formule de binôme donne

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}} + \frac{(n+1)a^2}{x^{2n+4}} + \ldots,$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} - \frac{(n+1)a^2}{(2n+3)x^{2n+3}} - \ldots.$$

La première conséquence à tirer de là, c'est qu'ayant $A+B=0$, la partie transcendante est simplement

$$A \log \frac{x-a}{x+a};$$

et la seconde, c'est que le produit du développement en série de l'intégrale par le facteur $(x^2-a^2)^n$, ne contenant aucune puissance positive de la variable, le polynôme $\mathfrak{F}(x)$ se réduit à la partie entière de l'expression $-A\log\frac{x-a}{x+a}(x^2-a^2)^n$.

Maintenant A est donné par le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de cette quantité, de la fraction $\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}}$, lorsque l'on y a fait $x=a+z$. Or ayant

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}(2a+z)^{-n-1},$$

nous sommes amené à chercher le coefficient de z^n dans le développement de $(2a+z)^{-n-1}$. Partant, à cet effet, de la formule du binôme

$$(\alpha+z)^m = \alpha^m + \frac{m}{1}\alpha^{m-1}z + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n + \ldots,$$

il suffira de supposer, dans le terme général,

$$\alpha = 2a, \quad m = -n-1,$$

pour obtenir la valeur

$$A = \frac{(-1)^n}{(2a)^{2n+1}}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n},$$

où je remarquerai que le facteur numérique $\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}$ est aussi le coefficient du terme moyen dans le développement de la puissance $2n$ de binôme. On peut donc, d'après la remarque faite (p. 63), lui substituer la quantité $2^{2n}\alpha_n$, en po-

sant

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n},$$

ce qui donnera

$$A = \frac{(-1)^n \alpha_n}{2a^{2n+1}}.$$

Ceci posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer la partie rationnelle de l'intégrale, en formant le polynôme $\mathcal{F}(x)$ au moyen des termes entiers en x du produit

$$A \log \frac{x+a}{x-a}(x^2-a^2)^n.$$

Mais le calcul et le résultat sont plus simples, en employant, à la place de la série

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{a^5}{x^5} + \ldots,$$

celle-ci,

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$$
$$= x\left[\frac{a}{x^2-a^2} - \frac{2}{3}\frac{a^3}{(x^2-a^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{a^5}{(x^2-a^2)^3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{a^7}{(x^2-a^2)^4} + \ldots\right],$$

qu'on démontre facilement en prenant les dérivées des deux membres, et employant cette identité :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(x^2-a^2)^n}\right] = \frac{1-2n}{(x^2-a^2)^n} - \frac{2na^2}{(x^2-a^2)^{n+1}}.$$

La partie entière qui résulte de la multiplication par $(x^2-a^2)^n$ se présente en effet sous la forme

$$x\left[a(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^3(x^2-a^2)^{n-2}\right.$$
$$\left. + \frac{2.4}{3.5}a^5(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots - (-1)^n \frac{2.4\ldots 2n-2}{3.5\ldots 2n-1}a^{2n-1}\right],$$

et il vient, par suite,

$$\mathcal{F}(x) = 2Ax\left[(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2} + \frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots\right.$$
$$\left. - (-1)^n \frac{2.4\ldots 2n-2}{3.5\ldots 2n-1}a^{2n-2}\right],$$

ou, en employant le facteur A sous la forme

$$A = \frac{(-1)^n}{2a^{2n+1}} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n},$$

et renversant l'ordre des termes,

$$\mathfrak{F}(x) = -\frac{x}{2}\left[\frac{1}{na^2} - \frac{2n-1}{2na^4}\frac{x^2-a^2}{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)a^6}\frac{(x^2-a^2)^2}{n-2} - \ldots\right];$$

c'est précisément le résultat trouvé précédemment, dans le cas de $a = 1$.

II. L'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ peut encore s'obtenir au moyen d'un changement de variables en posant

$$\frac{x-a}{x+a} = y.$$

Cette substitution donne en effet

$$x = a\frac{1+y}{1-y}, \quad dx = \frac{2a\,dy}{1-y},$$

d'où, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{(2a)^{2n+1}} \int \frac{(y-1)^{2n}\,dy}{y^{n+1}},$$

et l'intégration relative à la nouvelle variable s'effectue aisément comme il suit. Soit en désignant, pour abréger, les coefficients numériques par N_1, N_2, $N_3, \ldots$,

$$(y-1)^{2n} = y^{2n} + N_1 y^{2n-1} + N_2 y^{2n-2} + \ldots + N_1 y + 1,$$

nous écrirons, en rapprochant les termes équidistants des extrêmes et isolant le terme du milieu y^n,

$$(y-1)^{2n} = (y^{2n}+1) + N_1(y^{2n-1}+y) + N_2(y^{2n-2}+y^2) + \ldots + N_n y^n,$$

de sorte qu'il viendra

$$\frac{(y-1)^{2n}}{y^{n+1}} = \left(y^{n-2} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) + N_1\left(y^{n-2} + \frac{1}{y^n}\right)$$
$$+ N_2\left(y^{n-3} + \frac{1}{y^{n-1}}\right) + \ldots + \frac{N_n}{y},$$

et, par suite,

$$\int \frac{(y-1)^{2n}dy}{y^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(y^n - \frac{1}{y^n}\right) + \frac{N_1}{n-1}\left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{N_2}{n-2}\left(y^{n-2} - \frac{1}{y^{n-2}}\right) + \ldots + N_n \log y.$$

Cette formule doit coïncider, en y remplaçant y par $\frac{x-a}{x+a}$, avec celle que donne la première méthode, et, en effet, la partie logarithmique est la même, car le coefficient moyen N_n de la puissance $(y-1)^{2n}$ a précisément pour valeur

$$(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}.$$

Quant à l'égalité des parties rationnelles, elle conduit, en posant

$$x = a\sqrt{-1}\sin\varphi,$$

d'où

$$y = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

à l'identité suivante :

$$\frac{\sin n\varphi}{n} + N_1 \frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1} + N_2 \frac{\sin(n-2\varphi)}{n-2} + \ldots$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n} \cot\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$\times \left(\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{2}{3}\sin^4\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin^6\tfrac{1}{2}\varphi + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\sin^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\right);$$

mais, sans m'y arrêter, voici un troisième procédé entièrement différent des précédents, et qui servira de transition pour arriver aux méthodes propres essentiellement à l'intégration des fonctions algébriques.

Soit $u = (x^2 - a^2)^m$, l'exposant m étant quelconque, on aura, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{1}{2m}\frac{du}{dx} = x(x^2 - a^2)^{m-1},$$
$$\frac{1}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} = (x^2 - a^2)^{m-1} + (2m-2)x^2(x^2 - a^2)^{m-2}.$$

Or on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} &= (x^2-a^2)^{m-1} + (2m-2)(x^2-a^2+a^2)(x^2-a^2)^{m-2}\\ &= (2m-1)(x^2-a^2)^{m-1} + a^2(2m-2)(x^2-a^2)^{m-2},\end{aligned}$$

de sorte qu'il vient, en multipliant les deux membres par dx et intégrant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\frac{du}{dx} &= x(x^2-a^2)^{m-1}\\ &= (2m-1)\int(x^2-a^2)^{m-1}dx + a^2(2m-2)\int(x^2-a^2)^{m-2}dx.\end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$m = 1-n,$$

et l'on obtiendra

$$\frac{x}{(x^2-a^2)^n} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - 2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}},$$

ou bien

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{x}{(x^2-a^2)^n}$$

et, par conséquent, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned}2a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} &= -\int\frac{dx}{(x^2-a^2)} - \frac{x}{x^2-a^2},\\ 4a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} &= -3\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{x}{(x^2-a^2)^2},\\ 6a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^4} &= -5\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} - \frac{x}{(x^2-a^2)^3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ces relations successives conduisent évidemment à exprimer l'intégrale relative à un exposant quelconque $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$, au moyen de celle-ci $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$, et d'une fonction rationnelle de x; un calcul facile donne en effet pour résultat

$$a^{2n}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2} + f_n(x)\right],$$

en posant

$$f(x) = x\left[\frac{1}{x^2-a^2} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{(x^2-a^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{a^4}{(x^2-a^2)^3} - \ldots - (-1)^n\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n}\right].$$

Et, si l'on veut le démontrer, on observera qu'en changeant n en $n-1$, il vient

$$a^{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2} + f_{n-1}(x)\right],$$

de sorte qu'en substituant dans la relation générale

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{x}{(x^2-a^2)^n},$$

nous obtenons la condition

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) - (-1)^n\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n},$$

qui est satisfaite d'elle-même. La fonction $f_n(x)$ donne ainsi pour la partie rationnelle de l'intégrale proposée l'expression

$$\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x}{(x^2-a^2)^n} \times\left[(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2} + \frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots\right],$$

qui, d'après l'expression du coefficient A, coïncide bien avec celle qui a été obtenue précédemment sous la forme $\dfrac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n}$, et quant à la partie transcendante, l'identité

$$\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}$$

donne sur-le-champ

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.$$

III. La détermination du polynôme $\mathfrak{F}(x)$, dans l'équation

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = A\log\frac{x-a}{x+a} + \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n},$$

a été obtenue par cette remarque très-simple qu'en l'écrivant ainsi :

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{A}(x^2 - a^2)^n \log\frac{x+a}{x-a} + (x^2 - a^2)^n \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}},$$

le développement suivant les puissances descendantes de la variable de l'expression $(x^2 - a^2)^n \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$ est de la forme $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots$, sans contenir aucune partie entière en x. Or il résulte encore de cette remarque une conséquence importante que voici. Faisons, pour plus de simplicité, $a = 1$, et prenons les dérivées d'ordre n des deux membres dans la relation

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{A}(x^2 - 1)^n \log\frac{x+1}{x-1} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots.$$

A l'égard du produit $(x^2 - 1)^n \log\frac{x+1}{x-1}$, il faudra, en posant

$$\mathrm{U} = (x^2 - 1)^n, \quad \mathrm{V} = \log\frac{x+1}{x-1},$$

appliquer la formule

$$\frac{d^n \mathrm{UV}}{dx^n} = \frac{d^n \mathrm{U}}{dx^n}\mathrm{V} + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}\mathrm{U}}{dx^{n-1}}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}\mathrm{U}}{dx^{n-2}}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \ldots,$$

dont le premier terme $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\log\frac{x+1}{x-1}$ sera seul à dépendre du logarithme, les autres étant tous rationnels et même entiers. On a effectivement

$$\frac{d^a \log\frac{x+1}{x-1}}{dx^a} = \frac{d^a}{dx^a}[\log(x+1) - \log(x-1)]$$
$$= (-1)^{a-1}1.2\ldots(a-1)\left[\frac{1}{(x+1)^a} - \frac{1}{(x-1)^a}\right],$$

et comme $\frac{d^{n-a}(x^2-1)^n}{dx^{n-a}}$ contient en facteur $(x^2-1)^a$, le produit est entier en x. Réunissant ces termes au polynôme $\frac{d^n\mathfrak{F}(x)}{dx^n}$, en les faisant passer dans le premier membre, que je

désignerai alors par $F_n(x)$, nous parviendrons à cette relation

$$F_n(x) = A\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\log\frac{x+1}{x-1}$$
$$+1.2\ldots n(-1)^n\left[\frac{\alpha}{x^{n+1}}-\frac{(n+1)\beta}{x^{n+2}}+\ldots\right],$$

à laquelle je m'arrêterai un moment. Elle montre qu'en multipliant par le polynôme du $n^{ième}$ degré $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ la série infinie

$$\log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right),$$

le produit manque des puissances $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n}$, et il en résulte qu'en divisant $F_n(x)$ par $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, le quotient, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable, coïncide avec cette série, aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$. Cet exemple de l'approximation d'une transcendante par une fonction rationnelle, qui est intéressant en lui-même, recevra plus tard une application importante. Il met en évidence une propriété entièrement caractéristique des expressions $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ auxquelles on donne le nom de *polynômes de Legendre*, et qu'on désigne par X_n en posant

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Ces fonctions, introduites en Analyse par l'illustre géomètre à l'occasion de ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes, sont d'une grande importance, et donnent lieu à plusieurs théorèmes remarquables, dont l'un nous servira de nouvelle application du procédé de l'intégration par parties, fondé sur la formule

$$\int U\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}dx = \Theta - (-1)^n\int V\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}dx$$

ou

$$\Theta = U\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{dU}{dx}\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-2}V}{dx^{n-2}} + \ldots.$$

Soit, en effet, $V = (x^2 - 1)^{n+1}$, en supposant que U soit un polynôme arbitraire de degré n, l'intégrale du second membre disparaîtra, et nous obtiendrons d'abord

$$\int U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}\,dx = \Theta.$$

J'observe ensuite que, les dérivées successives de $(x^2-1)^{n+1}$ jusqu'à celle d'ordre n, contenant en facteur $x^2 - 1$, Θ s'évanouit pour $x = 1$ et $x = -1$, et il en résulte que l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}\,dx,$$

différence des valeurs de Θ pour $x = 1$ et $x = -1$ est nulle.

Le théorème exprimé par l'équation

$$\int_{-1}^{+1} UX_{n+1}\,dx = 0$$

appartient exclusivement aux polynômes de Legendre; car, en désignant un moment par $F(x)$ une autre fonction entière de degré $n+1$, telle que l'on ait aussi

$$\int_{-1}^{+1} UF(x)\,dx = 0,$$

on en conclurait, quelle que soit la constante k,

$$\int_{-1}^{+1} UF(x)\,dx - k\int_{-1}^{+1} UX_{n+1}\,dx = 0$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1} U[F(x) - kX_{n+1}]\,dx = 0.$$

Or, en prenant k, de manière que $F(x) - kX_{n+1}$ s'abaisse au $n^{ième}$ degré, et posant alors

$$U = F(x) - kX_{n+1},$$

nous trouverons la condition suivante :

$$\int_{-1}^{+1} U^2\,dx = 0.$$

Elle exige évidemment que U s'évanouisse identiquement; car, autrement, l'intégrale ne serait jamais nulle, tous les éléments étant positifs, et il en résulte

$$F(x) = kX_{n+1}.$$

Des intégrales définies $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}.$$

I. En employant précédemment, p. 237, l'égalité

$$\frac{d\log(x-a-b\sqrt{-1})}{dx} = \frac{1}{x-a-b\sqrt{-1}},$$

qui a été déduite de la définition même des logarithmes des quantités imaginaires, p. 36, à savoir

$$\log(x-a-b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log[(x-a)^2+b^2]$$
$$+\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x-a}{b}+2m\pi\right)\sqrt{-1},$$

nous avons introduit dans l'intégration des fonctions rationnelles une expression susceptible d'une infinité de déterminations distinctes, bien qu'ayant une seule et unique dérivée. Il en résulte qu'en passant des intégrales indéfinies aux intégrales définies, et écrivant

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}} = \log(x_1-a-b\sqrt{-1}) - \log(x_0-a-b\sqrt{-1})$$
$$= \log\frac{x_1-a-b\sqrt{-1}}{x_0-a-b\sqrt{-1}},$$

il reste encore à préciser celle des diverses valeurs du loga-

rithme dont il faut faire usage dans le second membre. La même question s'offre encore dans d'autres circonstances; ainsi, en posant

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x,$$

puis

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x_1 - \text{arc tang}\, x_0,$$

il sera nécessaire, pour lever toute ambiguïté, de donner un seul et unique sens aux quantités arc tang x_1 et arc tang x_0. Or on y parvient, dans ce cas, par cette remarque très-simple, mais importante, que l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$, prise à partir de zéro, représente *le plus petit arc*, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, parmi tous ceux en nombre infini qui ont x pour tangente. En effet, cet arc, d'après sa définition trigonométrique, croît d'une manière continue, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, lorsque la tangente augmente de $-\infty$ à $+\infty$. D'autre part, l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, qui n'en peut différer que par une constante, est aussi, par son origine géométrique, une fonction continue dans toute l'étendue des valeurs réelles de la variable (*); l'égalité annoncée résulte donc, quel que soit x, de ce qu'elle a lieu pour la valeur particulière $x = 0$. Convenant désormais de désigner exclusivement par la notation arc tang x le plus petit arc dont la tangente est x, nous poserons ainsi

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x,$$

et il suffira d'observer qu'on peut faire, en général,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_0^{x_1} f(x)dx - \int_0^{x_0} f(x)dx,$$

(*) On a établi, dans les préliminaires du Calcul intégral, qu'il en serait ainsi lors même que la fonction placée sous le signe d'intégration changerait brusquement de valeur, pourvu qu'elle reste toujours finie.

pour en conclure, avec un sens unique et entièrement déterminé, comme nous nous sommes proposé de l'obtenir, l'égalité

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x_1 - \operatorname{arc\,tang} x_0.$$

C'est ce résultat qui va nous donner la détermination précise de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}},$$

et par conséquent celle de l'intégrale définie d'une fonction rationnelle quelconque.

Soit, à cet effet, en reprenant l'égalité dont nous avons déjà fait usage,

$$\int \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}} = \int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} + \sqrt{-1}\int \frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2};$$

on aura, à l'égard de la partie réelle,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\log\left[(x_1-a)^2+b^2\right] - \frac{1}{2}\log\left[(x_0-a)^2+b^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{(x_1-a)^2+b^2}{(x_0-a)^2+b^2}.$$

Or les limites x_0, x_1 étant supposées essentiellement réelles, nous devons évidemment rejeter toute détermination imaginaire du logarithme, qui sera pris par conséquent dans son acception arithmétique. Quant à la seconde intégrale, la substitution $x-a=bz$ donnant

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \int_{\frac{x_0-a}{b}}^{\frac{x_1-a}{b}} \frac{dz}{1+z^2},$$

elle se trouve complétement déterminée, ainsi qu'on vient de le voir; nous avons donc

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b},$$

d'où, par suite,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x - a - b\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\log\frac{(x_1 - a)^2 + b^2}{(x_0 - a)^2 + b^2} + \left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1 - a}{b} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x_0 - a}{b}\right)\sqrt{-1},$$

le logarithme et les deux arc tang étant définis comme il a été dit précédemment.

II. Soit proposé, comme application de cette formule, d'obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x - \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha}.$$

Le terme réel, à savoir

$$\frac{1}{2}\log\frac{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}{(1 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha},$$

se réduit immédiatement à

$$\frac{1}{2}\log\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2},$$

et ne donne lieu à aucune remarque. Quant au coefficient de $\sqrt{-1}$, nous partirons de ces égalités

$$\frac{x_0 - a}{b} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{x_1 - a}{b} = \frac{-1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\pi + \alpha}{2},$$

en distinguant les deux cas suivants.

Soit d'abord $\alpha = 2n\pi + \alpha'$, n étant un nombre entier, et α' compris entre zéro et π; on aura immédiatement

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1 - a}{b} = \frac{\alpha'}{2};$$

mais, pour le second terme, il faudra retrancher π de l'arc $\frac{\pi + \alpha'}{2}$, de manière à comprendre le reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$,

ce qui donnera

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b}=\frac{\alpha'-\pi}{2},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b}=\frac{\pi}{2}.$$

Soit, en second lieu, $\alpha=2n\pi-\alpha'$, α' étant toujours compris entre zéro et π; nous trouverons alors

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b}=-\frac{\alpha'}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b}=\frac{\pi-\alpha'}{2},$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b}=-\frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat donne lieu aux remarques suivantes.

III. Le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'intégrale proposée

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x-\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha},$$

étant

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

il en résulte que, si l'on suppose α compris entre zéro et π, cette intégrale a la valeur constante $\frac{\pi}{2}$; mais, en faisant croître α de π à 2π, elle devient dans ce second intervalle égale à $-\frac{\pi}{2}$, puis reprend sa valeur primitive entre les limites 2π et 3π,.... Soit donc

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

$f(\alpha)$ est une fonction *discontinue*, périodique, égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$, suivant que la variable est renfermée entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, ou entre $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre en-

tier. L'expression d'une telle fonction, que nous rencontrons ainsi sous forme d'intégrale définie, nous fournit le premier exemple d'un fait d'une grande importance, et qui montre comment l'opération nouvelle d'intégration dépasse les limites des opérations de l'Algèbre, en donnant naissance à des combinaisons analytiques que celles-ci ne pourraient obtenir. Afin de compléter ce qui concerne $f(\alpha)$, et pour avoir occasion d'indiquer quelques considérations d'un usage continuel, je vais donner son expression en série sous la forme

$$\frac{1}{2}f(\alpha) = \sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \frac{\sin 7\alpha}{7} + \dots$$

Je partirai à cet effet du développement suivant les puissances croissantes de la variable de la fraction $\dfrac{1}{x - \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha}$, en employant, afin d'avoir une série limitée, la relation

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a^n} + \frac{x^n}{a^n(a-x)}.$$

Si nous posons

$$a = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

on obtiendra facilement, en égalant dans les deux membres les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \sin\alpha + x\sin 2\alpha + x^2\sin 3\alpha + \dots + x^{n-1}\sin n\alpha$$
$$+ \frac{x^n[\sin(n+1)\alpha - x\sin n\alpha]}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Multiplions maintenant par dx, et intégrons entre les limites -1 et $+1$; en écrivant, pour abréger,

$$R_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x^n[\sin(n+1)x - x\sin n\alpha]\,dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

et remarquant qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} x^{m-1}\,dx = \frac{2}{m},$$

lorsque l'exposant m est pair, tandis que l'intégrale s'évanouit si m est impair, nous en conclurons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 2\sin\alpha + \frac{2\sin3\alpha}{3} + \frac{2\sin5\alpha}{5} + \ldots + R_n.$$

Il reste maintenant à prouver que R_n devient nul pour n infini. Dans ce but, je remarque qu'on a généralement

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx,$$

et qu'en faisant $x = -x'$, il vient

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{1}^{0} f(-x')\,dx',$$

ou, après avoir renversé les limites et écrit x au lieu de x',

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = +\int_{0}^{1} f(-x)\,dx,$$

ce qui donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

Appliquons cette formule à l'intégrale R_n, en nous bornant, pour abréger, ce qui suffit d'ailleurs, au seul cas de n pair. On fera alors

$$f(x) = \frac{x^n[\sin(n+1)\alpha - x\sin n\alpha]}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

et, en employant l'identité

$$(1-2x\cos\alpha+x^2)(1+2x\cos\alpha+x^2) = 1-2x^2\cos2\alpha+x^4,$$

il viendra, après une réduction facile,

$$f(x)+f(-x) = \frac{2x^n\sin(n+1)\alpha}{1-2x^2\cos2\alpha+x^4} - \frac{2x^{n+2}\sin(n-1)\alpha}{1-2x^2\cos2\alpha+x^4}.$$

Cela posé, si l'on augmente tous les éléments des deux in-

tégrales

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1-2x^2\cos 2\alpha + x^4}, \quad \int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{1-2x^2\cos 2\alpha + x^4},$$

en remplaçant le dénominateur

$$1-2x^2\cos 2\alpha + x^4 = (x^2-\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha$$

par son minimum $\sin^2 2\alpha$, nous pourrons poser

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1-2x^2\cos 2\alpha + x^4} = \theta \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\theta}{(n+1)\sin^2 2\alpha},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{1-2x^2\cos 2\alpha + x^4} = \theta' \int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\theta'}{(n+3)\sin^2 2\alpha},$$

les facteurs θ et θ' étant moindres que l'unité. Or il en résulte cette expression

$$\frac{1}{2}R_n = \frac{\theta \sin(n+1)\alpha}{(n+1)\sin^2 2\alpha} - \frac{\theta' \sin(n-1)\alpha}{(n+3)\sin^2 2\alpha},$$

qui s'annule en effet pour n infiniment grand. La série ainsi obtenue

$$\pm\frac{\pi}{4} = \sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \ldots + \frac{1}{2}R_n$$

donne, dans l'hypothèse de $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la célèbre formule de Leibnitz,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

que j'indique aussi comme un nouvel exemple des suites semi-convergentes de Dirichlet, dont il a été question dans le Calcul différentiel, à propos de la série de Maclaurin. Le nombre n ayant été supposé pair, on a, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{2}R_n = (-1)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{\theta}{n+1} + \frac{\theta'}{n+3}\right),$$

si l'on observe que le trinôme $1-2x^2\cos 2\alpha + x^4$ devient alors $(1+x^2)^2$ et a l'unité pour minimum. La formule rigou-

reuse est donc

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}}{n-1} + (-1)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{\theta}{n+1} + \frac{\theta'}{n+3}\right),$$

et c'est par conséquent en prenant un égal nombre de termes positifs et de termes négatifs que la limite de la série de Leibnitz est $\frac{\pi}{4}$.

IV. Comme dernier exemple, nous nous proposerons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}$, et, en supposant d'abord les coefficients A, B, C réels, nous l'obtiendrons comme il suit. Observant qu'on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A\,dx}{(Ax+B)^2 + AC - B^2},$$

et qu'il est nécessaire de supposer $AC - B^2$ positif, pour que la fonction placée sous le signe d'intégration soit toujours finie, je ferai

$$Ax + B = z\sqrt{AC - B^2}.$$

Cela étant, aux limites $-\infty$ et $+\infty$ de x, correspondront, pour z, $-\infty$ et $+\infty$, si A est positif, en prenant le radical en valeur absolue. Nous aurons, par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Mais, si le coefficient A est négatif, les limites par rapport à z seront $+\infty$ et $-\infty$, de sorte qu'il viendra dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Ce procédé n'est pas applicable lorsque A, B, C sont des quantités imaginaires quelconques; soit alors

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x-a)(x-b),$$

nous ferons, en suivant la méthode générale,

$$\frac{1}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{A(a-b)}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right),$$

ce qui conduit à chercher les valeurs de chacune des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-a}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-b}$. Or une observation importante se présente ici; en faisant $a=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et employant la relation générale

$$\int\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]+\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\sqrt{-1},$$

on voit qu'à cause des limites $-\infty$ et $+\infty$ la partie réelle se présentera sous la forme indéterminée de la différence de deux infinis. Ce point s'éclaircira en partant de l'équation suivante

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\log\frac{(\eta-\alpha)^2+\beta^2}{(\varepsilon+\alpha)^2+\beta^2}$$
$$+\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\eta-\alpha}{\beta}-\operatorname{arc\,tang}\frac{-\varepsilon-\alpha}{\beta}\right)\sqrt{-1},$$

où nous ferons croître indéfiniment ε et η. On reconnaît alors que le terme logarithmique tend vers la limite $\frac{1}{2}\log\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}$; et, quant au coefficient de $\sqrt{-1}$, il sera évidemment $+\pi$ ou $-\pi$, suivant que β sera positif ou négatif. En désignant donc un instant par (β) une quantité égale à l'unité en valeur absolue et du signe de β, nous pourrons écrire

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\log\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}+\pi(\beta)\sqrt{-1}.$$

Cela posé, on aura de même, si l'on fait $b=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dx}{x-\alpha'-\beta'\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\log\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}+\pi(\beta')\sqrt{-1},$$

et l'on voit qu'en retranchant membre à membre, les termes réels dépendant du rapport arbitraire $\frac{\eta}{\varepsilon}$ se détruisent; d'où

cette valeur entièrement déterminée

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx=\pi[(\beta)-(\beta')]\sqrt{-1}.$$

Ce résultat offre un nouvel exemple de l'expression, par une intégrale définie, d'une fonction discontinue qui ne saurait évidemment s'obtenir au moyen des opérations de l'Algèbre. Si l'on fait, en effet,

$$f(\beta,\beta')=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-\alpha'-\beta'\sqrt{-1}}\right]dx,$$

on aura

$$f(\beta,\beta')=0$$

quand les variables seront de mêmes signes, et

$$f(\beta,\beta')=2\pi(\beta)\sqrt{-1}$$

quand elles seront de signes contraires. Plaçons-nous dans ce dernier cas, pour achever la détermination de l'intégrale proposée, et supposons qu'on ait désigné par a celle des deux racines où le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Nous aurons alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{A(a-b)}=\frac{\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2-AC}},$$

et l'on voit que le signe du radical $\sqrt{B^2-AC}$ devra être choisi de telle manière que, dans le rapport $\dfrac{\sqrt{B^2-AC}}{A}=\dfrac{1}{2}(a-b)$, le coefficient de $\sqrt{-1}$ ait le signe $+$. Cette règle s'accorde bien, comme on le reconnaît sur-le-champ, avec le résultat obtenu dans le cas où les coefficients A, B, C ont été supposés réels.

Intégration des fonctions algébriques qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme.

Nous savons qu'en désignant par $F(x)$ un polynôme entier, l'expression la plus générale d'une fonction rationnelle du

radical $\sqrt{F(x)}$ et de la variable est de la forme $G + \frac{H}{\sqrt{F(x)}}$, G et H représentant des fonctions rationnelles. Par conséquent, l'intégrale de cette espèce de fonctions algébriques dépend essentiellement de la quantité

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et notre objet est maintenant de donner le moyen d'obtenir cette intégrale dans les cas où elle est exprimable algébriquement, sinon de reconnaître qu'elle est impossible sous cette forme.

I. En partant de la remarque faite que $\frac{H}{\sqrt{F(x)}}$ se décompose en termes de ces deux espèces : $\frac{x^n}{\sqrt{F(x)}}$, $\frac{1}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$, où les exposants sont entiers et positifs, j'établirai d'abord qu'on a

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{F(x)}} = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + Q\sqrt{F(x)},$$

P étant un polynôme entier dont le degré est de deux unités inférieur à celui de F(x), et Q également un polynôme entier.

Posons à cet effet

$$F(x) = Ax^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k,$$

et considérons l'identité suivante

$$\frac{d\left[x^n\sqrt{F(x)}\right]}{dx} = nx^{n-1}\sqrt{F(x)} + x^n\frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}} = \frac{x^{n-1}[2nF(x)+xF'(x)]}{2\sqrt{F(x)}}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned}2nF(x)+xF'(x) = (2n+k)Ax^k + (2n+k-1)A_1x^{k-1}\\ +\ldots+(2n+1)A_{k-1}\,x + 2nA_k,\end{aligned}$$

il en résulte, en intégrant, la relation générale

$$2x^n\sqrt{F(x)} = (2n+k)A\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{F(x)}} + (2n+k-1)A_1\int\frac{x^{n+k-2}dx}{\sqrt{F(x)}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(2n+k-1)A_{k-1}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{F(x)}} + 2nA_k\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{F(x)}},$$

dont voici les conséquences.

Soit en premier lieu $n=0$, on remarquera que l'intégrale $\int\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{F(x)}}$ disparaît, ce qui permet de réduire $\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{F(x)}}$ à la forme annoncée. Faisant ensuite $n=1$, on obtiendra à l'aide de ce résultat la même conclusion pour $\int\frac{x^k dx}{\sqrt{F(x)}}$, et il est clair qu'en continuant de proche en proche les mêmes opérations on parviendra à l'équation

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{F(x)}} = \int\frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + Q\sqrt{F(x)},$$

où les polynômes entiers P et Q sont respectivement du degré $k-2$ et $n-k+1$.

Je pars maintenant de l'identité obtenue en différentiant $\frac{\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n}$, savoir

$$2\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n}\right] = \frac{(x-a)F'(x)-2nF(x)}{(x-a)^{n+1}\sqrt{F(x)}},$$

et j'observe qu'en faisant un moment

$$\varphi(x) = (x-a)F'(x) - 2nF(x),$$

nous aurons, pour une dérivée d'ordre quelconque $\varphi^i(x)$, cette expression

$$\varphi^i(x) = (x-a)F^{i+1}(x) + (i-2n)F^i x,$$

d'où

$$\varphi^i(a) = (i-2n)F^i(a),$$

ce qui permettra d'écrire

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^k}{1.2\ldots k}\varphi^k(a)$$

$$= -2n\,\mathrm{F}(a) + \frac{x-a}{1}(1-2n)\,\mathrm{F}'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}(2-2n)\,\mathrm{F}''(a)$$

$$+ \ldots + \frac{(x-a)^k}{1.2\ldots k}(k-2n)\,\mathrm{F}^k(a).$$

En remplaçant le polynôme $\varphi(x)$ par ce développement, l'intégration donne donc la relation générale que voici :

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{\mathrm{F}(x)}}{(x-a)^n} = &-2n\int\frac{\mathrm{F}(a)\,dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{\mathrm{F}(x)}}\\ &+(1-2n)\int\frac{\mathrm{F}'(a)\,dx}{(x-a)^n\sqrt{\mathrm{F}(x)}}\\ &+\frac{2-2n}{1.2}\int\frac{\mathrm{F}''(a)\,dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{\mathrm{F}(x)}}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{k-2n}{1.2\ldots k}\int\frac{\mathrm{F}^k(a)\,dx}{(x-a)^{n-k+1}\sqrt{\mathrm{F}(x)}}.\end{aligned}$$

Or on en tire, pour $n=1$, l'intégrale

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{\mathrm{F}(x)}},$$

exprimée par un terme algébrique, et celles-ci

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\mathrm{F}(x)}},\quad \int\frac{\mathrm{P}\,dx}{\sqrt{\mathrm{F}(x)}},$$

où le polynôme P est de degré $k-2$. Faisant ensuite $n=2$, et employant le résultat précédent, nous ramènerons à la même forme

$$\int\frac{dx}{(x-a)^3\sqrt{\mathrm{F}(x)}},$$

et il est visible qu'en continuant ainsi de proche en proche, on parviendra à l'équation générale

$$\int\frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{\mathrm{F}(x)}} = \int\frac{\mathrm{A}\,dx}{(x-a)\sqrt{\mathrm{F}(x)}} + \int\frac{\mathrm{P}\,dx}{\sqrt{\mathrm{F}(x)}} + \frac{\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}(x)}}{(x-a)^n},$$

A étant une constante, P un polynôme entier de degré $k-2$, et Q un polynôme entier de degré $n-1$. Une exception remarquable s'offre toutefois si l'on suppose $F(a)=0$, et les mêmes raisonnements, appliqués à la relation

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n} = (1-2n)\int\frac{F'(a)\,dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}} \\ +\frac{2-2n}{1.2}\int\frac{F''(a)\,dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{F(x)}} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{k-2n}{1.2\ldots k}\int\frac{F^k(a)\,dx}{(x-a)^{n-k+1}\sqrt{F(x)}},\end{aligned}$$

montrent que l'intégrale

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$$

se réduit alors à

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}}$$

et à un terme algébrique. Ces résultats établis, voici maintenant les conséquences à en tirer pour la question que nous avons en vue.

II. Une substitution simple, donnée p. 15, permet de ramener les quantités de la forme $f(x,\sqrt{X})$, où X est un polynôme de degré pair, à une expression semblable, mais dans laquelle le degré du polynôme placé sous le radical est diminué d'une unité, et par suite impair. Nous admettrons qu'on ait effectué cette substitution dans l'intégrale proposée, de sorte que le nombre k, resté quelconque jusqu'ici, sera dorénavant supposé impair. Cela posé, l'intégrale d'une fonction rationnelle de la variable et du radical $\sqrt{F(x)}$, mise en premier lieu sous la forme

$$\int\left[G+\frac{H}{\sqrt{F(x)}}\right]dx,$$

puis réduite à sa partie essentielle

$$\int\frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

a été représentée par une combinaison linéaire des éléments

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{F(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{F(x)}}.$$

Enfin ces éléments ont été ramenés eux-mêmes aux suivants :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{F(x)}}, \ldots, \quad \int \frac{x^{k-2} dx}{\sqrt{F(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}},$$

de sorte qu'on a cette expression générale, savoir

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}} = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + \Sigma \int \frac{A\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}} + f(x)\sqrt{F(x)},$$

dans laquelle P est un polynôme de degré $k-2$, $f(x)$ une fonction rationnelle, et le signe Σ comprend un nombre fini de termes relatifs à diverses valeurs des constantes A et a, ces dernières se trouvant toutes parmi les racines de l'équation $\frac{1}{H} = 0$. Or on voit que $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}}$ sera la quantité algébrique $f(x)\sqrt{F(x)}$ lorsque les termes

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{A\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$$

disparaîtront tous de l'équation; et cette condition, qui est suffisante, est de plus nécessaire, comme M. Liouville l'a démontré le premier (*). La détermination sous forme algébrique de l'intégrale proposée, ou la démonstration de l'impossibilité de l'obtenir sous une telle forme, dépend donc uniquement du calcul de réduction à ces éléments simples, à savoir

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{F(x)}},$$

(*) *Voyez* trois Mémoires de M. Liouville sur cette question dans le XXIIIe et le XXIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, un travail de M. Tchebychef, intitulé : *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, t. XVIII, p. 87.

l'exposant n ayant pour limite supérieure $k-2$, et

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}.$$

On nomme *fonctions de première espèce* les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{F(x)}}, \ldots, \quad \int \frac{x^{\frac{k-3}{2}}\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et *fonctions de seconde espèce* celles-ci :

$$\int \frac{x^{\frac{k+1}{2}}\,dx}{\sqrt{F(x)}}, \quad \int \frac{x^{\frac{k+3}{2}}\,dx}{\sqrt{F(x)}}, \ldots, \quad \int \frac{x^{k-2}\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

qui sont en même nombre $\frac{k-1}{2}$ que les précédentes. Les développements suivant les puissances descendantes de la variable des fonctions de première espèce ont pour premier terme une puissance négative, et ceux des fonctions de seconde espèce commencent par une puissance positive. Les constantes représentant les racines de l'équation $F(x) = 0$ ont reçu la dénomination de *modules;* enfin l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$$

a été nommée *fonction de troisième espèce*, et la constante a le paramètre. Aucune combinaison linéaire des fonctions de première et de seconde espèce ne peut s'exprimer explicitement par des quantités algébriques, logarithmiques ou exponentielles, en nombre fini. Au contraire, à l'égard des fonctions de troisième espèce, il existe de telles combinaisons dont la valeur est le logarithme d'une fonction rationnelle de x et $\sqrt{F(x)}$. L'étude de ces intégrales, sur lesquelles nous venons de donner quelques notions succinctes, a une importance considérable dans la science de notre époque. Dans le cas où $F(x)$ est du troisième ou du quatrième degré, Euler et Legendre y ont trouvé l'origine de la théorie des transcendantes elliptiques, qui constitue maintenant une des parties essentielles de l'Analyse générale. Lorsque le degré surpasse cette

limite, on entre dans le champ bien plus vaste de la théorie des fonctions abéliennes, dont Abel et Jacobi sont les fondateurs, et qui a produit les grandes et belles découvertes de Göpel, de MM. Rosenhain et Weierstrass, et surtout de Riemann, qu'une mort prématurée, comme celle d'Abel et d'Eisenstein, a malheureusement enlevé à la science dans tout l'éclat de son talent. C'est dans le Calcul intégral que se trouve donc l'origine de tant de notions analytiques nouvelles et fécondes acquises de nos jours, et l'on y est amené par cette voie si naturelle, et cette idée si simple, d'étudier après les intégrales des fonctions rationnelles celles qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme. Le cas où un binôme du second degré seulement figure sous le radical sert de liaison à ces deux catégories d'expressions, puisqu'il suffit d'un changement de variable pour faire disparaître l'irrationnalité. Mais cette réduction demande à être exposée en détail, en raison des nombreuses applications qu'elle reçoit; c'est l'objet des considérations qui vont suivre.

De l'intégrale $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$.

1. Je dis que, $F(x)$ étant un polynôme entier du degré m, on a, en général,

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{\varepsilon\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + \Phi(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C};$$

ε désigne, dans cette relation, une constante, et $\Phi(x)$ un polynôme du degré $m-1$. Effectivement, la distinction entre les fonctions de première et de seconde espèce disparaît dans le cas actuel, car la formule de réduction, à savoir

$$\begin{aligned} x^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = (n+1)\int \frac{Ax^{n+1}\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \\ + (2n+1)\int \frac{Bx^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \\ + n\int \frac{Cx^{n-1}\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \end{aligned}$$

donnera, de proche en proche, en y faisant $n = 0, 1, 2, \ldots$, la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$ exprimée par celle-ci $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ et un terme algébrique $\varphi(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $n-1$. De là se conclut immédiatement la relation annoncée, où le facteur ε, qui figure dans la partie transcendante, se détermine comme il suit.

Nous développerons les deux membres suivant les puissances descendantes de la variable, et considérant le premier d'abord, nous ferons dans ce but

$$\frac{1}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \frac{\alpha''}{x^3} + \ldots,$$

puis nous ordonnerons par rapport aux puissances décroissantes de x le produit

$$F(x)\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \frac{\alpha''}{x^3} + \ldots\right),$$

qui se composera ainsi d'une partie entière et d'une série infinie

$$\frac{a}{x} + \frac{a'}{x^2} + \frac{a''}{x^3} + \ldots.$$

On aura donc pour l'intégrale

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$$

un développement dont tous les termes seront algébriques, sauf un seul, $\int \frac{a\,dx}{x} = a \log x$. Or l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \int dx\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \frac{\alpha''}{x^3} + \ldots\right)$$

donnera aussi, dans le second membre, un terme de même nature, $\alpha \log x$, tandis que la partie

$$\Phi(x)\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

conduira évidemment à une série entièrement algébrique. On

aura par conséquent

$$a = \alpha\varepsilon,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{a}{\alpha},$$

a étant, d'après ce qu'on a vu, le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ dans la quantité

$$\frac{F(x)}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = F(x)\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \frac{\alpha''}{x^3} + \ldots\right).$$

Dans le cas où le trinôme $Ax^2 + 2Bx + C$ se réduit à la forme $1 - x^2$, qui mérite une attention particulière, j'observe qu'on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{1.4}\frac{1}{x^5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{x^{2n+1}} + \ldots\right)$$

et, par conséquent, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{-1}}$. Il en résulte ensuite

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^5} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{x^{2n+1}} + \ldots\right)$$

ainsi la constante désignée par a contient le même facteur $\frac{1}{\sqrt{-1}}$.

La formule $\varepsilon = \frac{a}{\alpha}$ montre donc que ε est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^5} + \ldots\right).$$

Mais voici une nouvelle expression de cette constante. Prenant l'intégrale du premier membre entre les limites $x = -1$, $x = +1$, la partie algébrique disparaîtra à cause du

facteur $\sqrt{1-x^2}$, et nous obtiendrons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale proposée soit simplement algébrique, c'est qu'elle s'évanouisse étant prise entre les limites -1 et $+1$. Supposant, par exemple, que $F(x)$ contienne seulement des puissances impaires de la variable, de sorte que, si l'on fait un moment

$$f(x) = \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

on ait

$$f(-x) = -f(x).$$

La relation

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_0^1 [f(x)+f(-x)]dx,$$

dont nous nous sommes déjà servi, donne sur-le-champ

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 0,$$

de sorte que sous la condition admise l'intégrale proposée est algébrique.

II. Cette conclusion résulterait encore de l'équation

$$(n+1)\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = n\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^n\sqrt{1-x^2},$$

à laquelle conduit la relation générale du § II, car, en y faisant successivement $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$, elle donne

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{5}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on en tire, par des substitutions successives,

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots \right.$$
$$\left. +\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^{2n}\right)\sqrt{1-x^2},$$

de sorte qu'en attribuant diverses valeurs à l'exposant impair, multipliant par des constantes et ajoutant, on aura, pour l'intégrale ainsi formée, une expression algébrique. Nous remarquerons dans cette relation que le coefficient de $\sqrt{1-x^2}$ est formé des $2n+1$ premiers termes du développement déjà employé de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et j'ajoute encore qu'on obtient, en faisant $x=0$, $x=1$, cette intégrale définie :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Si nous posons, en second lieu, dans la même équation, $n=1, 3, 5, \ldots$, nous serons conduits aux égalités

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2},$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2},$$
$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5}{6}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

et un calcul tout semblable donnera pour résultat

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$-\varepsilon\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Ici le polynôme facteur de $\sqrt{1-x^2}$ représente les $2n$ premiers termes du développement, suivant les puissances crois-

santes de x, de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Effectivement, si l'on prend les intégrales depuis $x=0$ dans la relation considérée, on peut écrire, sans constante arbitraire,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Or, ayant

$$\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} = x^{2n}\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots\right),$$

nous en conclurons

$$\int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{x^{2n+3}}{2(2n+3)}+\ldots,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(1+\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{x^{2n+3}}{2(2n+3)}+\ldots\right)\\ &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{(2n+2)x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots.\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme

$$x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{4.5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}$$

représente bien, aux termes près de l'ordre $2n+1$, l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

III. L'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui vient de se présenter, peut

être considérée comme immédiatement connue; la relation

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donnant en effet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

Je m'y arrêterai un moment toutefois pour observer qu'en prenant zéro pour limite inférieure, c'est, parmi les déterminations en nombre infini de la fonction arc sin x, celle qui s'évanouit et change de signe avec la variable qu'on doit choisir. Ainsi, en réservant la notation arc sin x pour désigner le plus petit arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x, nous écrirons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x.$$

On en conclura donc, sans aucune ambiguïté,

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin b - \operatorname{arc} \sin a,$$

et en particulier, par exemple

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

C'est à cette intégrale qu'il convient le plus souvent de ramener la suivante

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}},$$

lorsque, les racines du trinôme étant réelles, le coefficient A est négatif. Faisant, en effet,

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x-\alpha)(x-\beta),$$

nous poserons

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} t,$$

et il viendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Au reste, et dans tous les cas, elle s'obtient sous forme finie explicite par la substitution

$$A\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \theta^2,$$

qui donne en différentiant, après avoir chassé le dénominateur,

$$(A-\theta^2)dx = 2(x-\alpha)\theta d\theta.$$

Or on a

$$A(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2\theta^2,$$

d'où

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = (x-\alpha)\theta;$$

on en conclut donc l'égalité suivante

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{2d\theta}{A-\theta^2},$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\log\frac{\theta+\sqrt{A}}{\theta-\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\log\frac{\sqrt{x-\beta}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\beta}-\sqrt{x-\alpha}},$$

pour le cas de $A > 0$. Le cas de $A < 0$ donne lieu ensuite à ces transformations successives

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\frac{2}{\sqrt{-A}}\operatorname{arc tang}\frac{\theta}{\sqrt{-A}} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{A+\theta^2}{A-\theta^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}.$$

La même substitution s'obtient en considérant la courbe du second degré $y = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ comme unicursale, et déterminant ses points individuellement au moyen d'un faisceau de droites issues d'un point quelconque ayant pour coordonnées $x = a$, $y = \sqrt{Aa^2+2Ba+C}$. Supposons d'abord réelles les racines α et β du trinôme; en prenant en particu-

lier $a = \alpha$, le faisceau aura pour équation

$$y = (x - \alpha)\theta,$$

et l'abscisse du point unique d'intersection variable sera donnée par l'égalité

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = (x - \alpha)\theta,$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$A(x - \beta) = (x - \alpha)\theta^2.$$

J'ajoute que, s'il s'agit d'une hyperbole, A étant positif, on peut employer des parallèles à l'une des asymptotes, à savoir

$$y = \theta - \frac{Ax + B}{\sqrt{A}}.$$

Nous n'aurons encore en effet qu'un point d'intersection dont l'abscisse s'obtiendra en posant

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \theta - \frac{Ax + B}{\sqrt{A}};$$

ce qui conduit, en élevant au carré et réduisant, à l'équation du premier degré

$$\theta^2 - \frac{2\theta(Ax + B)}{\sqrt{A}} + \frac{B^2 - AC}{A} = 0.$$

Or il vient, en différentiant,

$$\left(\theta - \frac{Ax + B}{\sqrt{A}}\right)d\theta - \theta\sqrt{A}\,dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\,d\theta - \theta\sqrt{A}\,dx = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{d\theta}{\theta\sqrt{A}},$$

et, par conséquent,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{\log\theta}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right),$$

expression qu'on ramène aisément à celle qui a été obtenue plus haut.

Des intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$;

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}.$$

I. La substitution $x = a - \frac{1}{z}$ donne

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{(-1)^n z^n dz}{\sqrt{Gz^2-2Hz+K}},$$

en posant

$$G = Aa^2+2Ba+C, \quad H = -Aa-B, \quad K = A,$$

et l'on est ainsi ramené aux cas qui viennent d'être traités; mais un autre changement de variables aura l'avantage de conduire directement à l'expression de l'intégrale. Il se tire de la transformation du trinôme homogène du second degré

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

par la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

et, en faisant $D = B^2 - AC$, de l'identité bien connue

$$\begin{aligned}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 D = {} & [A\alpha\beta + B(\alpha\delta+\beta\gamma) + C\gamma\delta]^2 \\ & -(A\alpha^2+2B\alpha\gamma+C\gamma^2)(A\beta^2+2B\beta\delta+C\delta^2).\end{aligned}$$

Comme cas particulier, j'obtiens en effet la suivante, savoir

$$(x-a)^2 D = [Aax + B(a+x) + C]^2 - G(Ax^2+2Bx+C);$$

elle montre qu'en posant

$$(x-a)t = Aax + B(a+x) + C - \sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

on aura

$$\frac{(x-a)D}{t} = Aax + B(a+x) + C + \sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

et, par suite, en ajoutant et retranchant membre à membre,

$$(x-a)\left(t+\frac{D}{t}\right)=2[Aax+B(a+x)+C],$$

$$(x-a)\left(-t+\frac{D}{t}\right)=2\sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

de sorte que la variable x et le radical $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ pourront s'exprimer en fonction rationnelle de t. Or écrivons

$$\frac{Aax+B(a+x)+C}{x-a}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{D}{t}\right),$$

d'où

$$\frac{G}{x-a}=H+\frac{1}{2}\left(t+\frac{D}{t}\right);$$

il viendra en différentiant, et après avoir changé les signes,

$$\frac{G\,dx}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}\left(-t+\frac{D}{t}\right)\frac{dt}{t};$$

on en tire aisément, si l'on multiplie membre à membre avec l'équation

$$(x-a)\left(-t+\frac{D}{t}\right)=2\sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

ce résultat

$$\frac{\sqrt{G}\,dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{dt}{t},$$

et nous en conclurons la transformée suivante de l'intégrale proposée

$$\int\frac{G^{n+\frac{1}{2}}\,dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\int\left[H+\frac{1}{2}\left(t+\frac{D}{t}\right)\right]^n\frac{dt}{t}.$$

Soient maintenant $n_1, n_2, \ldots$ les coefficients $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots$ de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme; je distinguerai dans le développement de l'expression

$$\left[H+\frac{1}{2}\left(t+\frac{D}{t}\right)\right]^n=H^n+\frac{n_1}{2}\left(t+\frac{D}{t}\right)H^{n-1}+\frac{n_2}{2^2}\left(t+\frac{D}{t}\right)^2H^{n-2}+\ldots$$

deux espèces de termes: en premier lieu, ceux qui contien-

nent la variable, et qu'on peut évidemment réunir par groupes, tels que

$$\mathrm{I}\left[t^i + \left(\frac{\mathrm{D}}{t}\right)^i\right],$$

I étant une constante; ils donnent dans l'intégrale la quantité

$$\int\left[t^i+\left(\frac{\mathrm{D}}{t}\right)^i\right]\frac{dt}{t} = \frac{1}{i}\left[t^i-\left(\frac{\mathrm{D}}{t}\right)^i\right]$$

$$= \frac{\left[\mathrm{A}ax + \mathrm{B}(a+x) + \mathrm{C} - \sqrt{\mathrm{G}}\sqrt{\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{C}}\right]^i}{i(x-a)^i}$$

$$- \frac{\left[\mathrm{A}ax + \mathrm{B}(a+x) + \mathrm{C} + \sqrt{\mathrm{G}}\sqrt{\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{C}}\right]^i}{i(x-a)^i},$$

et leur réunion constitue la partie algébrique sous la forme

$$\frac{\mathrm{F}(x)\sqrt{\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{C}}}{(x-a)^n},$$

$\mathrm{F}(x)$ étant un polynôme entier. Nous envisagerons ensuite les termes indépendants de t, fournis par les puissances paires $\left(t+\frac{\mathrm{D}}{t}\right)^{2i}$, à savoir $\frac{(i+1)(i+2)\ldots 2i}{1.2\ldots i}\mathrm{D}^i$; ils donnent le facteur de la partie transcendante $\int\frac{dt}{t} = \log t$ sous la forme suivante

$$\mathrm{N} = \mathrm{H}^n + \frac{n_2}{2^2}2\mathrm{D}\mathrm{H}^{n-2} + \frac{n_4}{2^4}6\mathrm{D}^2\mathrm{H}^{n-4} + \ldots$$

$$= \sum \frac{n_{2i}}{2^{2i}}\,\frac{(i+1)(i+2)\ldots 2i}{1.2\ldots i}\mathrm{D}^i\mathrm{H}^{n-2i},$$

ou encore, d'après une transformation déjà employée,

$$\mathrm{N} = \sum n_{2i}\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\mathrm{D}^i\mathrm{H}^{n-2i},$$

le nombre i prenant toutes les valeurs de zéro à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair. Nous parvenons ainsi à

l'expression générale de l'intégrale, savoir

$$\int \frac{G^{n+\frac{1}{2}}dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$
$$= N\log\frac{Aax+B(a+x)+C-\sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}$$
$$+\frac{F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n}.$$

Soit, par exemple $n=0$; la partie algébrique disparaît : on a donc simplement

$$\int \frac{G^{\frac{1}{2}}dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \log\frac{Aax+B(a+x)+C-\sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}.$$

Nous remarquerons que la fonction placée sous le signe log se reproduit au signe près lorsqu'on permute x et a; c'est l'origine d'une proposition importante dans la théorie des fonctions elliptiques.

II. La constante N, dont l'expression vient d'être donnée, peut être obtenue par une autre méthode sous une forme différente, qui conduira à un théorème remarquable d'Euler.

Reprenant, à cet effet, la relation

$$\int \frac{G^{n+\frac{1}{2}}dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{NG^{\frac{1}{2}}dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$
$$+\frac{F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n},$$

et supposant $x=a+z$, nous développerons les deux membres suivant les puissances ascendantes de z. Or ayant fait

$$G = Aa^2+2Ba+C,$$

la série de Taylor donnera d'abord

$$\frac{1}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \sum \frac{z^i}{1.2\ldots i}\frac{d^iG^{-\frac{1}{2}}}{da^i},$$

et il en résultera pour l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

une série infinie dont tous les termes sont algébriques, un seul excepté, à savoir

$$\int \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{z^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n G^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = \frac{\log z}{1.2\ldots n} \frac{d^n G^{-\frac{1}{2}}}{da^n}.$$

Quant au second membre, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

conduit aussi à la quantité analogue $\log z . G^{-\frac{1}{2}}$; et comme aucun terme transcendant ne peut provenir de la partie algébrique

$$\frac{F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n},$$

nous devrons égaler les deux coefficients de $\log z$, et nous parvenons à l'expression suivante

$$N = \frac{G^{n+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots n} \frac{d^n G^{-\frac{1}{2}}}{da^n}.$$

De là résulte la relation

$$\frac{G^{n+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots n} \frac{d^n G^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = \sum n_{2i} \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i} D^i H^{n-2i};$$

on en déduit, dans le cas particulier de $G = 1 - a^2$, qui donne $D = 1$, $H = a$, le théorème d'Euler

$$\frac{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots n} \frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = 1 + \frac{1}{2} n_2 a^2 + \frac{1.3}{2.4} n_4 a^4 + \ldots.$$

III. En supposant encore

$$Ax^2 + 2Bx + C = 1 - x^2,$$

nous allons maintenant déterminer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}},$$

à l'égard de laquelle nous observerons tout d'abord que la constante a doit être supposée supérieure à l'unité afin que la différentielle ne devienne pas infinie entre les limites -1 et $+1$ de la variable. Nous admettrons, de plus, qu'elle est positive, et nous ferons

$$\sqrt{1-a^2} = i\sqrt{a^2-1},$$

d'où, pour l'expression de l'intégrale indéfinie,

$$\int \frac{i\sqrt{a^2-1}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{1-ax-i\sqrt{a^2-1}\sqrt{1-x^2}}{x-a}.$$

Cela posé, soit X la partie réelle, et Y le coefficient de i dans la quantité imaginaire placée sous le logarithme; en nommant R le module, et θ l'argument de $X + iY$, nous pourrons écrire

$$\int \frac{i\sqrt{a^2-1}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \log R + i\theta.$$

Or on conclut des équations

$$X = \frac{1-ax}{x-a}, \quad Y = -\frac{\sqrt{a^2-1}\sqrt{1-x^2}}{x-a}$$

$R^2 = X^2 + Y^2 = 1$, par conséquent $\log R = 0$, et il vient, en supprimant le facteur i,

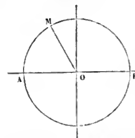
$$\int \frac{\sqrt{a^2-1}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \theta.$$

Il suffit donc maintenant de reconnaître comment varie l'angle θ lorsque x croît de -1 à $+1$. Ayant, à cet effet, construit le cercle $X^2 + Y^2 = 1$, je remarque qu'on a

$$\frac{dX}{dx} = \frac{a^2-1}{(x-a)^2},$$

de sorte que X croît toujours avec x; d'ailleurs Y a le signe de $\sqrt{a^2-1}$ et sera positif si, pour fixer les idées, nous prenons le radical positivement. Il en résulte qu'on décrit, dans l'intervalle considéré, la demi-circonférence placée au-dessus de l'axe des abscisses depuis le point A (*fig.* 28), dont l'abscisse est -1, et correspond à la limite inférieure $x=-1$, jusqu'au point diamétralement opposé B, donné à la limite supérieure $x=+1$. L'argument θ de $X+iY$ pour un point M, dont les coordonnées sont X et Y, étant l'angle MOB, est donc, à l'origine, égal à deux droits, puis arrive en diminuant jusqu'à zéro pour $x=1$. La différence des valeurs qu'il reçoit aux deux limites de l'intégrale étant $-\pi$, nous avons

Fig. 28.



$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{a^2-1}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\pi,$$

et, par conséquent,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Voici quelques conséquences de ce résultat. Développons d'abord les deux membres suivant les puissances descendantes de a, il viendra ainsi

$$\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{a^{2n+1}}+\ldots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\frac{1}{a^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{a^5}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{a^{2n+1}}+\ldots\right),$$

et nous obtiendrons, en égalant les termes en $\frac{1}{a^{2n+1}}$,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Multiplions ensuite par un polynôme entier

$$F(a) = Aa^n + A_1 a^{n-1} + \ldots + A_n$$

les deux membres; on voit facilement que le coefficient du terme en $\frac{1}{a}$ dans le produit du polynôme par la progression géométrique

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots$$

est précisément $F(x)$; par conséquent, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

a pour valeur $\pi\varepsilon$, ε étant le coefficient du terme en $\frac{1}{a}$ dans le produit

$$F(a)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{1}{a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{a^5} + \ldots\right),$$

proposition déjà obtenue, page 299.

IV. En dernier lieu je remarquerai, relativement à la substitution déduite de la propriété caractéristique de l'Invariant des formes du second degré, à savoir

$$t = \frac{Aax + B(a+x) + C - \sqrt{G}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}{x-a},$$

qu'en considérant encore comme unicursale la courbe du second degré

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

on serait facilement parvenu au même résultat. Effectivement, une sécante issue d'un point de la courbe

$$x = a, \quad y = \sqrt{Aa^2 + 2Ba + C} = \sqrt{G}$$

a pour équation

$$Y - \sqrt{G} = (X-a)\theta,$$

de sorte que l'abscisse du point variable d'intersection est

donnée par la relation

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-\sqrt{G}=(x-a)\theta.$$

Remplaçons le coefficient angulaire θ par une autre variable t, en faisant

$$\theta=-\frac{t+H}{\sqrt{G}},$$

et cette relation deviendra, en changeant les signes des deux membres,

$$\sqrt{G}-\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=(x-a)\frac{t+H}{\sqrt{G}}.$$

Or il suffit d'observer qu'ayant

$$G=Aa^2+2Ba+C,\quad H=-Aa-B,$$

il en résulte

$$G-(x-a)H=Aax+B(a+x)+C;$$

de sorte qu'on retrouve précisément la valeur

$$t=\frac{Aax+B(a+x)+C-\sqrt{G}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}.$$

Applications.

I. Afin de donner quelques exemples des méthodes et des résultats qui précèdent, je vais déterminer la valeur de ces deux intégrales définies, où α et β sont des constantes qu'on supposera inférieures à l'unité, savoir :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}},$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A l'égard de la première, je partirai de la formule

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right),$$

en faisant

$$Ax^2+2Bx+C=(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2),$$

ce qui donnera, si l'on égale les dérivées des deux membres,

$$Ax+B=-\alpha(1-2\beta x+\beta^2)-\beta(1-2\alpha x+\alpha^2).$$

On en conclut que la fonction

$$Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

prend, pour $x=1$, la valeur

$$\begin{aligned}&-\alpha(1-\beta)^2-\beta(1-\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}(1-\alpha)(1-\beta)\\&=-\left[\sqrt{\alpha}(1-\beta)-\sqrt{\beta}(1-\alpha)\right]^2=-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1+\sqrt{\alpha\beta})^2,\end{aligned}$$

et, pour $x=-1$, celle-ci :

$$\begin{aligned}&-\alpha(1+\beta)^2-\beta(1+\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}(1+\alpha)(1+\beta)\\&=-\left[\sqrt{\alpha}(1+\beta)-\sqrt{\beta}(1+\alpha)\right]^2=-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1-\sqrt{\alpha\beta})^2;\end{aligned}$$

de sorte que l'intégrale définie entre les limites -1 et $+1$ se réduit à cette forme très-simple :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Passant maintenant à la seconde, il faudra, d'après la méthode générale, décomposer d'abord en fractions simples la fonction rationnelle

$$\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)},$$

dans laquelle, le numérateur et le dénominateur étant du second degré, la partie entière sera simplement une constante, et nous ferons en conséquence

$$\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}=C+\frac{A}{1-2\alpha x+\alpha^2}+\frac{B}{1-2\beta x+\beta^2}.$$

Cette constante s'obtient en faisant x infini, et a pour va-

leur $\frac{1}{4}$; on trouve ensuite aisément

$$A = \frac{1}{4}\frac{(1-\alpha^2)(2\alpha-\beta-\beta\alpha^2)}{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)},$$

$$B = \frac{1}{4}\frac{(1-\beta^2)(2\beta-\alpha-\alpha\beta^2)}{(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)}.$$

Cela étant, la formule

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

ou plutôt celle-ci, en remplaçant a par $\frac{a}{a'}$,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-a'x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-a'^2}}$$

donne sur-le-champ

$$A\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{2\alpha-\beta-\beta\alpha^2}{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)},$$

$$B\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{2\beta-\alpha-\alpha\beta^2}{(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)},$$

d'où

$$A\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\alpha x^2)\sqrt{1-x^2}} + B\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{3-\alpha\beta}{1-\alpha\beta},$$

et, par suite, cette valeur très-simple :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{3-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

II. Les deux résultats que nous venons d'établir dépendent seulement du produit $\alpha\beta$; c'est là un fait analytique important, dont je vais, en quelques mots, indiquer les consé-

quences, mais en considérant seulement la relation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Soit à cet effet, en développant suivant les puissances croissantes de α,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1+\alpha x+\alpha^2\frac{3x^2-1}{2}+\ldots+\alpha^n\varphi_n(x)+\ldots,$$

je remarque que le coefficient de α^n est un polynôme entier du $n^{\text{ième}}$ degré en x; car en changeant α en $\frac{\alpha}{x}$ pour y supposer ensuite x infini, le premier membre se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}} = 1+\alpha+\frac{1.3}{1.2}\alpha^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\alpha^n+\ldots;$$

d'où résulte que $\frac{\varphi_n(x)}{x^n}$, prenant pour x infini la valeur finie $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}$, est bien du degré n en x. Cela posé, on aura de même

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = 1+\beta x+\beta^2\frac{3x^2-1}{2}+\ldots+\beta^m\varphi_m(x)+\ldots,$$

et si, après avoir développé $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$, on égale les coefficients des mêmes termes dans la relation

$$\int_{-1}^{+1} dx[1+\alpha x+\ldots+\alpha^n\varphi_n(x)+\ldots][1+\beta x+\ldots+\beta^m\varphi_m(x)+\ldots]$$
$$= 2\left[1+\frac{1}{3}\alpha\beta+\frac{1}{5}\alpha^2\beta^2+\ldots+\frac{1}{2n+1}\alpha^n\beta^n+\ldots\right],$$

on trouve, pour n et m différents,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0,$$

et, pour $m=n$,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Or, en ajoutant membre à membre les diverses égalités

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\varphi_n(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\varphi_{n-1}(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\varphi_{n-2}(x)\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\varphi_0(x)\,dx = 0,$$

après les avoir multipliées par des constantes $A_0, A_1, \ldots, A_n$, on trouve la condition

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)[A_0\varphi_n(x) + A_1\varphi_{n-1}(x) + A_2\varphi_{n-2}(x) + \ldots + A_n\varphi_0(x)]\,dx = 0,$$

où le facteur

$$A_0\varphi_n(x) + A_1\varphi_{n-1}(x) + \ldots + A_n\varphi_0(x)$$

peut représenter un polynôme quelconque du $n^{ième}$ degré, et cette condition, comme on l'a déjà établi, a pour conséquence que $\varphi_{n+1}(x)$ ne diffère du polynôme X_{n+1} de Legendre que par un facteur constant. On a en effet l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \ldots + \alpha^n X_n + \ldots,$$

qui a servi de définition et de point de départ pour la théorie de ces fonctions, la démonstration que nous venons de donner des deux théorèmes

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

étant celle de Legendre. (*Exercices de Calcul intégral*, t. III, p. 247.)

III. Je me proposerai enfin, comme dernière application,

de retrouver la formule déjà obtenue d'Euler, savoir

$$\frac{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots n}\frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = a^n + \frac{1}{2}n_2 a^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}n_4 a^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}n_6 a^{n-6} + \ldots.$$

Soit, à cet effet,

$$\frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = \frac{A_n}{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

de sorte qu'on ait, par la série de Taylor,

$$[1+(a+z)^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{A_n}{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}\frac{z^n}{1.2\ldots n},$$

puis, en changeant z en $z(1-a^2)$ et multipliant par $(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$[1-2az-(1-a^2)z^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{A_n z^n}{1.2\ldots n}.$$

Cela posé, je pars de la relation

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

en y remplaçant a par

$$\frac{1-az}{z},$$

ce qui donnera, après une réduction facile,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-2az-(1-a^2)z^2}} = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{[1-(a+x)z]\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, en développant $\dfrac{1}{1-(a+x)z}$ sous la forme

$$1+(a+x)z+(a+x)^2z^2+\ldots,$$

et égalant dans les deux membres les coefficients de z^n, on obtiendra

$$\frac{\pi A_n}{1.2\ldots n} = \int_{-1}^{+1}\frac{(a+x)^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mais nous savons que, dans le second membre, l'intégrale

a pour valeur $\pi\varepsilon$, ε désignant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le produit

$$(a+x)^n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^7}+\ldots\right);$$

ainsi, en posant

$$(a+x)^n = a^n + n_1 a^{n-1}x + n_2 a^{n-2}x^2 + \ldots,$$

on obtient sur-le-champ l'expression cherchée

$$\frac{A_n}{1.2\ldots n} = a^n + \frac{1}{2}n_2 a^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}n_4 a^{n-4} + \ldots.$$

INTÉGRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

En désignant par $f(x)$ une fonction rationnelle de la variable, et par $f(\sin x, \cos x)$ une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, les seules expressions, dans le champ infini des quantités transcendantes, dont nous puissions aborder l'intégration sont celles-ci :

$$f(\sin x, \cos x),\quad e^{\omega x}f(x),\quad e^{\omega x}f(\sin x, \cos x),$$

et nous n'aurons point, pour parvenir à notre but, à exposer des principes nouveaux, ni des méthodes propres qui en soient la conséquence. On va retrouver, en effet, d'une part la décomposition en fractions simples, et de l'autre le procédé pour obtenir, lorsqu'elle est possible sous forme algébrique, l'intégrale d'une fonction dépendant de la racine carrée d'un polynôme. Il ne sera pas toutefois sans profit d'employer ainsi, dans des conditions différentes, les méthodes qui nous sont déjà familières; elles recevront de ces applications un nouveau jour qui en fera mieux saisir la portée et le caractère. On verra surtout comment cette recherche des procédés d'intégration conduit naturellement à approfondir, au point de vue de l'Analyse générale, la nature des expressions $(f\sin x, \cos x)$, qui sont le type des fonctions périodiques, en

préparant ainsi ce que nous aurons à dire, dans la seconde partie du Cours, des fonctions à double période.

De l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$.

I. Nous partirons de la transformation en une fonction rationnelle de la quantité transcendante $f(\sin x, \cos x)$, qu'on obtient en posant

$$e^{x\sqrt{-1}} = z.$$

De là résulte, en effet,

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2z\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

de sorte qu'on peut faire

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)};$$

$F(z)$ et $F_1(z)$ désignent des polynômes entiers en z. Cela posé, je vais montrer que de la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ résulte une décomposition, en éléments simples, de la fonction transcendante qui en donnera semblablement et d'une manière immédiate l'intégration. Considérant, dans ce but, la quantité $\frac{1}{(z-a)^n}$, qui est le type des fractions simples, je pose

$$a = e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

ce qui sera toujours possible en exceptant le cas de $a = 0$, et je remarque qu'on aura

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{\alpha\sqrt{-1}}} = \frac{e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}\left(-1 - i\cot\frac{x-\alpha}{2}\right);$$

c'est une conséquence, en effet, de la relation

$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}} + 1}{e^{x\sqrt{-1}} - 1}.$$

mise sous la forme

$$\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}-1}=\frac{1}{2}\left(-1-i\cot\frac{x}{2}\right),$$

quand on y change x en $x-\alpha$. De là résulte une première transformation du groupe des fractions partielles

$$\frac{A}{z-a}+\frac{A_1}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}$$

en un polynôme entier et du degré $n+1$ en $\cot\dfrac{x-\alpha}{2}$; mais nous pouvons faire

$$\cot^2 x=-1-\frac{d\cot x}{dx},$$

$$\cot^3 x=-\cot x+\frac{1}{2}\frac{d^2\cot x}{dx^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et la relation identique

$$\cot^{k+1}x=-\cot^{k-1}x-\frac{1}{k}\frac{d\cot^k x}{dx}$$

montre que, de proche en proche, on exprimera linéairement $\cot^n x$ au moyen des dérivées successives de $\cot x$ jusqu'à celle d'ordre $n-1$. Nous parvenons donc à ce nouveau résultat, savoir

$$\frac{A}{z-a}+\frac{A_1}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$=C+\mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)+\mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n},$$

les constantes C, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_n$ dépendant linéairement des divers numérateurs $A, A_1, \ldots, A_n$. Ce point établi, je mettrai en évidence, si elles existent, les racines nulles du polynôme $F(z)$ en faisant

$$F(z)=z^{m+1}(z-a)^{n+1}(z-b)^{p+1}\ldots(z-l)^{r+1},$$

et je modifierai la formule générale de décomposition en fractions simples en réunissant à la partie entière du quotient

$\frac{F_1(z)}{F(z)}$ les fractions partielles en $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^{n+1}}$, de manière à avoir

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} = \mathfrak{F}(z) + \frac{A}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$+ \frac{B}{z-b} + \frac{B_1}{(z-b)^2} + \dots + \frac{B_p}{(z-b)^{p+1}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{L}{z-l} + \frac{L_1}{(z-l)^2} + \dots + \frac{L_s}{(z-l)^{s+1}},$$

où $\mathfrak{F}(z)$ sera, par conséquent, de la forme $\Sigma a_k z^k$ avec des puissances entières, mais positives ou négatives, de z. Maintenant nous conclurons de cette formule élémentaire, en revenant à la valeur $z = e^{x\sqrt{-1}}$, l'expression suivante de la fonction $f(\sin x, \cos x)$. La quantité $\mathfrak{F}(z)$, devenant d'abord

$$\Sigma a_k e^{kx\sqrt{-1}} = \Sigma a_k (\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx),$$

nous donne une première partie, que je désignerai par $\Pi(x)$, et qui en sera considérée comme la partie entière. Les fractions partielles donnent ensuite une seconde partie $\Phi(x)$, qui, en posant

$$a = e^{\alpha\sqrt{-1}}, \quad b = e^{\beta\sqrt{-1}}, \dots, \quad l = e^{\lambda\sqrt{-1}},$$

aura la forme suivante :

$$\Phi(x) = \text{const.} + \mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \dots + \mathcal{A}_n \frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}$$
$$+ \mathcal{B}\cot\tfrac{1}{2}(x-\beta) + \mathcal{B}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx} + \dots + \mathcal{B}_p \frac{d^p\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx^p}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \mathcal{L}\cot\tfrac{1}{2}(x-\lambda) + \mathcal{L}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx} + \dots + \mathcal{L}_s \frac{d^s\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx^s}.$$

La détermination des coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{L}, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \dots$ rendra plus complète encore l'analogie de la formule que nous venons d'obtenir

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x)$$

avec celle de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

II. Je ferai, dans ce but, en ayant en vue le groupe des coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $x = \alpha + h$, et je développerai les deux membres suivant les puissances croissantes de h. Or, les séries provenant ainsi de la partie entière et de $\cot\frac{1}{2}(x-\beta)$, ..., $\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)$ ne contiendront que des puissances entières et positives de h, tandis que la quantité $\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)$ et ses dérivées donneront un nombre fini et limité de puissances négatives. Nous avons, en effet,

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \cot\frac{h}{2} = \frac{2}{h} - \frac{h}{6} - \frac{h^3}{360} + \ldots,$$

et, comme la dérivée de h prise par rapport à x est l'unité, on déduira successivement de cette relation

$$\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} = -\frac{2}{h^2} - \frac{1}{6} - \frac{h^2}{120} + \ldots,$$

$$\frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^2} = +\frac{4}{h^3} - \frac{h}{60} + \ldots,$$

et en général, si l'on n'écrit point les puissances positives de h,

$$\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n} = (-1)^n 1.2\ldots n\frac{2}{h^{n+1}}.$$

Le développement du second membre $\Pi(x) + \Phi(x)$ se composant ainsi des termes

$$2\left[\frac{\mathcal{A}}{h} - \frac{\mathcal{A}_1}{h^2} + \frac{1.2\mathcal{A}_2}{h^3} - \ldots + (-1)^n\frac{1.2\ldots n\mathcal{A}_n}{h^{n+1}}\right]$$

et d'une série infinie de puissances positives de h, nous obtiendrons les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_n$, en formant la partie du développement du premier membre $f(\sin x, \cos x)$ qui est composée des seules puissances négatives de h. Supposons à cet effet

$$f\left[\sin(\alpha+h), \cos(\alpha+h)\right] = \frac{A}{h} - \frac{A_1}{h^2} + \frac{1.2\,A_2}{h^3} - \ldots + (-1)^n\frac{1.2\ldots n.A_n}{h^{n+1}},$$

on aura immédiatement

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}A, \quad \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}A_1, \ldots, \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}A_n,$$

et j'ajoute que, si l'on multiplie membre à membre l'égalité précédente avec celle-ci, que donne le théorème de Taylor,

$$\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha-h) = \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) - \frac{h}{1}\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^2} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n} + \ldots,$$

on trouve pour le coefficient divisé par deux, du terme en $\frac{1}{h}$, précisément

$$\mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}.$$

Le groupe total des *éléments simples*, se rapportant à la quantité $x = \alpha$ qui rend infinie la fonction proposée, est ainsi le demi-résidu, correspondant à $h = 0$, de l'expression

$$f\Big[\sin(\alpha+h), \cos(\alpha+h)\Big]\cot\frac{x-\alpha-h}{2};$$

résultat analogue, comme on voit, au théorème de Lagrange démontré dans l'Introduction (p. 6).

III. Après avoir jusqu'ici suivi pas à pas la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, nous allons introduire une considération nouvelle qui a son origine dans la propriété caractéristique de la transcendante $f(\sin x, \cos x)$ d'être périodique. Je remarque que, d'après la relation

$$\cot\frac{x}{2} = \cot x + \operatorname{cosec} x,$$

la fonction $\Phi(x)$ s'exprime en termes de deux formes, à savoir

$$\frac{d^n\cot(x-\alpha)}{dx^n} \quad \text{et} \quad \frac{d^n\operatorname{cos\acute{e}c}(x-\alpha)}{dx^n},$$

les premiers ayant pour période π et les autres se repro-

duisant en signe contraire lorsqu'on change x en $x+\pi$. Or, à l'égard de

$$\mathrm{H}(x) = \Sigma a_k (\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx),$$

si l'on fait

$$\theta(x) = \Sigma a_{2k} (\cos 2kx + \sqrt{-1}\sin 2kx)$$

et

$$\eta(x) = \Sigma a_{2k+1} [\cos(2k+1)x + \sqrt{-1}\sin(2k+1)x],$$

en réunissant d'une part les termes contenant les multiples pairs, et de l'autre les multiples impairs de la variable, on aura de même

$$\theta(x+\pi) = \theta(x), \quad \eta(x+\pi) = -\eta(x).$$

De là résulte la décomposition de la fonction proposée en deux parties $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, de sorte qu'on aura

$$f(\sin x, \cos x) = \Theta(x) + \mathrm{H}(x),$$

avec les conditions

$$\Theta(x+\pi) = \Theta(x), \quad \mathrm{H}(x+\pi) = -\mathrm{H}(x),$$

les expressions des nouvelles fonctions introduites étant

$$\begin{aligned}\Theta(x) = \theta(x) &+ \mathcal{A}\cot(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d\cot(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot(x-\alpha)}{dx^n} \\ &+ \mathcal{B}\cot(x-\beta) + \mathcal{B}_1 \frac{d\cot(x-\beta)}{dx} + \ldots + \mathcal{B}_p \frac{d^p \cot(x-\beta)}{dx^p} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mathcal{L}\cot(x-\lambda) + \mathcal{L}_1 \frac{d\cot(x-\lambda)}{dx} + \ldots + \mathcal{L}_s \frac{d^s \cot(x-\lambda)}{dx^s}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x) = \eta(x) &+ \mathcal{A}\operatorname{cosec}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d\operatorname{cosec}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \operatorname{cosec}(x-\alpha)}{dx^n} \\ &+ \mathcal{B}\operatorname{cosec}(x-\beta) + \mathcal{B}_1 \frac{d\operatorname{cosec}(x-\beta)}{dx} + \ldots + \mathcal{B}_p \frac{d^p \operatorname{cosec}(x-\beta)}{dx^p} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mathcal{L}\operatorname{cosec}(x-\lambda) + \mathcal{L}_1 \frac{d\operatorname{cosec}(x-\lambda)}{dx} + \ldots + \mathcal{L}_s \frac{d^s \operatorname{cosec}(x-\lambda)}{dx^s}.\end{aligned}$$

Nous voyons donc apparaître deux éléments simples distincts $\cot x$ et $\operatorname{cosec} x$ ou $\frac{1}{\sin x}$, appartenant en propre aux fonc-

tions dont la périodicité est celle de $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, au lieu de $\cot\frac{x}{2}$ qui, dans le cas général, a le rôle de la quantité $\frac{1}{x}$ à l'égard des fonctions rationnelles. C'est par les applications qu'on reconnaîtra surtout l'utilité de ces distinctions, et pour commencer par un cas facile, j'envisagerai d'abord la fonction $\frac{1}{\cos\alpha - \cos x}$.

J'observe en premier lieu qu'en introduisant la variable $z = e^{x\sqrt{-1}}$, il vient

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = \frac{2z}{2z\cos\alpha - 1 - z^2}.$$

Or les racines du dénominateur sont évidemment les quantités $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, le numérateur est seulement du premier degré; ainsi la partie entière $\Pi(x)$ n'existe point, et nous aurons

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = \mathrm{C} + \mathcal{A}\cot\frac{x-\alpha}{2} + \mathcal{B}\cot\frac{x+\alpha}{2}.$$

Calculant maintenant les résidus pour $x = \alpha$ et $x = -\alpha$, j'obtiens les quantités

$$\frac{1}{\sin\alpha}, \quad -\frac{1}{\sin\alpha},$$

et par suite, en divisant par deux les valeurs,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \mathcal{B} = -\frac{1}{2\sin\alpha},$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = \mathrm{C} + \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\cot\frac{x-\alpha}{2} - \cot\frac{x+\alpha}{2}\right].$$

On trouve d'ailleurs sans peine que $\mathrm{C} = 0$; mais voici, pour des cas moins faciles, une détermination directe et immédiate de cette constante. Supposons en général

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{\mathrm{F}_1(z)}{\mathrm{F}(z)},$$

$\mathrm{F}(z)$ ne contenant point le facteur z et étant de degré au

moins égal à celui de $F_1(z)$, la partie désignée par $\Phi(x)$ existera seule dans l'expression de la fonction, qui sera ainsi

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) &= C + \mathcal{A} \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots \\ &+ \mathcal{B} \cot\tfrac{1}{2}(x-\beta) + \mathcal{B}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mathcal{L} \cot\tfrac{1}{2}(x-\lambda) + \mathcal{L}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx} + \ldots. \end{aligned}$$

Or je dis qu'en appelant G et H les valeurs de $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ pour z nul et infini, on aura

$$C = \frac{1}{2}(G + H).$$

En effet, la relation

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{(x-\alpha)\sqrt{-1}} + 1}{e^{(x-\alpha)\sqrt{-1}} - 1} = \sqrt{-1}\,\frac{ze^{-\alpha\sqrt{-1}} + 1}{ze^{-\alpha\sqrt{-1}} - 1},$$

fait voir qu'en supposant z nul et infini toutes les quantités $\cot\frac{x-\alpha}{2}$ se réduisent à $-\sqrt{-1}$ et $+\sqrt{-1}$; elle montre aussi que leurs dérivées des divers ordres s'évanouissent; nous avons donc

$$\begin{aligned} G &= C - (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L})\sqrt{-1}, \\ H &= C + (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L})\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L} = \frac{G - H}{2}\sqrt{-1}, \quad C = \frac{G + H}{2}.$$

Dans l'exemple considéré tout à l'heure, on trouve sur-le-champ $G = 0$, $H = 0$, de sorte que C est nul comme nous l'avons dit.

IV. Soit en second lieu l'expression

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = z^{n-m}\frac{z^{2m} - 1}{z^{2n} - 1},$$

les nombres m et n étant entiers. Si l'on suppose $m > n$, on

voit qu'il existera une partie entière $\Pi(x)$, dont voici le calcul. Partant de cette identité

$$z^{n-m}\frac{z^{2m}-1}{z^{2n}-1} = z^{m-n} + z^{n-m} + z^{m-3n} + z^{3n-m} + \ldots$$
$$+ z^{m-(2k-1)n} + z^{(2k-1)n-m} + \frac{z^{(2k+1)n-m} - z^{m-(2k-1)n}}{z^{2n}-1},$$

je prends pour k le plus grand entier contenu dans $\frac{m-n}{2n}$, de sorte qu'on ait $k = \frac{m-n}{2n} + \varepsilon$, ε étant positif et moindre que l'unité. Il en résulte que

$$(2k+1)n - m = 2\varepsilon n \quad \text{et} \quad m-(2k-1)n = 2(1-\varepsilon)n;$$

ainsi, dans la fraction du second membre, le numérateur est de degré inférieur au dénominateur. L'identité employée se vérifie d'ailleurs sur-le-champ, car, en remplaçant z par l'exponentielle $e^{x\sqrt{-1}}$, elle se transforme dans l'équation bien connue

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots$$
$$+ 2\cos[m-(2k-1)n]x + \frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\Pi(x) = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots + 2\cos[m-(2k-1)n]x,$$

et

$$\Phi(x) = \frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx},$$

ou simplement

$$\Phi(x) = \frac{\sin mx}{\sin nx},$$

en supposant maintenant m inférieur à n, en valeur absolue.

Ceci établi, les racines de l'équation $z^{2n} - 1 = 0$ sont données par la formule $z = e^{\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}$, k prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, et si l'on fait $\alpha = \frac{k\pi}{n}$, le résidu de la fonction $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ correspondant à $x = \alpha$ sera $\frac{\sin m\alpha}{n\cos n\alpha} = \frac{(-1)^k \sin m\alpha}{n}$;

et nous obtenons, par conséquent,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\sum (-1)^k \sin m\alpha \cot\frac{1}{2}(x-\alpha).$$

Mais, ayant

$$\Phi(x+\pi) = (-1)^{m+n}\Phi(x),$$

la fonction appartiendra à l'espèce $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, suivant que $m+n$ sera pair ou impair, de sorte qu'il vient, pour le premier cas,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\sum (-1)^k \sin m\alpha \cot(x-\alpha),$$

et, pour le second,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\sum \frac{(-1)^k \sin m\alpha}{\sin(x-\alpha)}.$$

Or, dans les deux cas, les termes des sommes qui correspondent aux valeurs k et $k+n$ sont égaux; on peut donc, en doublant, se borner à prendre $k=1, 2, \ldots, n-1$, le résidu relatif à $k=0$ étant nul.

Soit encore l'expression

$$\cot(x-\alpha)\cot(x-\beta)\ldots\cot(x-\lambda);$$

en désignant par n le nombre des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \lambda$ et faisant $a = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $b = e^{\beta\sqrt{-1}}, \ldots$, $l = e^{\lambda\sqrt{-1}}$, on aura, pour transformée en z,

$$(\sqrt{-1})^n \frac{(z^2+a^2)(z^2+b^2)\ldots(z^2+l^2)}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)\ldots(z^2-l^2)}.$$

On voit que le numérateur et le dénominateur sont de même degré; ainsi il n'existe pas de partie entière et nous avons seulement à calculer $\Phi(x)$. Or les $2n$ racines du dénominateur sont, d'une part, $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $e^{\beta\sqrt{-1}}, \ldots$, $e^{\lambda\sqrt{-1}}$, et, en outre, ces mêmes quantités changées de signe, c'est-à-dire $e^{(\alpha+\pi)\sqrt{-1}}$, $e^{(\beta+\pi)\sqrt{-1}}$, $e^{(\lambda+\pi)\sqrt{-1}}$; d'ailleurs, ayant $\Phi(x+\pi) = \Phi(x)$, la fonction proposée appartient au type $\Theta(x)$ et ses éléments simples, où figurent les arguments α et $\alpha+\pi$, β et $\beta+\pi, \ldots$,

se réduiront à ceux-ci :

$$\cot(x-\alpha),\quad \cot(x-\beta),\ldots,\quad \cot(x-\lambda).$$

Nous aurons, en conséquence,

$$\Phi(x) = C + \mathcal{A}\cot(x-\alpha) + \mathcal{B}\cot(x-\beta) + \ldots + \mathcal{L}\cot(x-\lambda),$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ étant les résidus de $\Phi(x)$ pour $x=\alpha$, $x=\beta,\ldots$, $x=\lambda$, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \cot(\alpha-\beta)\cot(\alpha-\gamma)\ldots\cot(\alpha-\lambda),$$
$$\mathcal{B} = \cot(\beta-\alpha)\cot(\beta-\gamma)\ldots\cot(\beta-\lambda),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathcal{L} = \cot(\lambda-\alpha)\cot(\lambda-\beta)\ldots\cot(\lambda-\alpha).$$

Enfin la constante C s'obtient par l'équation établie p. 328, $C = \frac{1}{2}(G+H)$, au moyen des valeurs

$$G = (-\sqrt{-1})^n,\quad H = (\sqrt{-1})^n,$$

que prend la transformée en z, pour z nul et infini, ce qui donne simplement $C = \cos\frac{n\pi}{2}$.

On traitera de la même manière l'expression plus générale

$$\frac{F(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)},$$

où le numérateur est un polynôme entier en $\sin x$ et $\cos x$, et, si nous supposons qu'il soit homogène et de degré $n-1$, on sera amené à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{F(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}\\
&= \frac{F(\sin\alpha, \cos\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}\,\frac{1}{\sin(x-\alpha)}\\
&+ \frac{F(\sin\beta, \cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}\,\frac{1}{\sin(x-\beta)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{F(\sin\lambda, \cos\lambda)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-\alpha)}\,\frac{1}{\sin(x-\lambda)}.
\end{aligned}$$

Nous en déduirons, en chassant le dénominateur,

$$\begin{aligned}
F(\sin x, \cos x) &= \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)} F(\sin\alpha, \cos\alpha) \\
&+ \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)} F(\sin\beta, \cos\beta) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\varkappa)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-\varkappa)} F(\sin\lambda, \cos\lambda),
\end{aligned}$$

résultat qui se rapporte à la théorie de l'interpolation comme donnant l'expression de la fonction $F(\sin x, \cos x)$, où entrent n coefficients arbitraires, au moyen des n valeurs qu'elle prend pour $x=\alpha$, $x=\beta, \ldots$, $x=\lambda$.

V. C'est pour obtenir l'intégrale de la fonction transcendante $f(\sin x, \cos x)$ qu'a été établie la formule de décomposition en éléments simples, dont je ne multiplierai pas davantage les applications ; sous ce point de vue, voici maintenant les conséquences à tirer de la formule générale

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x).$$

En premier lieu, et à l'égard de

$$\Pi(x) = \Sigma a_k \left(\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx\right),$$

nous observerons qu'on a

$$\frac{d\sin kx}{dx} = k\cos kx, \quad \frac{d\cos kx}{dx} = -k\sin kx,$$

d'où, par conséquent,

$$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}, \quad \int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k}.$$

Ainsi l'intégration reproduit une expression de même forme que la fonction proposée, sauf un terme proportionnel à la variable provenant de la partie constante qu'elle peut contenir.

Soit, par exemple, $\Pi(x) = \cos^n x$, l'égalité $2\cos x = \frac{z^2+1}{z}$ donnera, en l'élevant à la puissance n, et rapprochant les

termes équidistants des extrêmes,

$$2^n \cos^n x = z^n + \frac{1}{z^n} + \frac{n}{1}\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(z^{n-4} + \frac{1}{z^{n-4}}\right) + \ldots.$$

Distinguons maintenant les deux cas de n pair et impair; nous aurons, dans le premier, avec un terme constant,

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}},$$

et, par conséquent,

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\,x;$$

dans le second, il viendra

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos x,$$

d'où cette formule où la variable ne sort plus du signe sinus

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin x.$$

On traitera de même l'expression plus générale

$$\sin^a x \cos^b x = \left(\frac{z^2-1}{2z\sqrt{-1}}\right)^a \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^b;$$

mais l'intégrale $\int \sin^a \cos^b x\,dx$ s'obtient encore par un autre procédé fondé sur l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d \sin^{a-1} x \cos^{b+1} x}{dx} &= (a-1)\sin^{a-2} x \cos^{b+2} x - (b+1)\sin^a x \cos^b x,\\ &= (a-1)\sin^{a-2} x \cos^b x (1-\sin^2 x) - (b+1)\sin^a x \cos^b x,\\ &= (a-1)\sin^{a-2} x \cos^b x - (a+b)\sin^a x \cos^b x.\end{aligned}$$

Nous en tirons, en effet,

$$(a+b)\int \sin^a x \cos^b x\,dx = (a-1)\int \sin^{a-2} x \cos^b x\,dx - \sin^{a-1} x \cos^{b+1} x,$$

ce qui permettra de ramener, de proche en proche, la quantité $\int \sin^a x \cos^b x\,dx$ à celle-ci : $\int \sin^{a-2n} \cos^b x\,dx$, où n est un entier quelconque. Si l'on suppose a impair, le calcul est terminé, car, en faisant $a = 2n+1$, on obtient immédiatement

$$\int \sin x \cos^b x\,dx = -\frac{\cos^{b+1} x}{b+1}.$$

Dans le cas de a pair, nous prendrons $2n = a$, et l'on opérera ensuite sur l'intégrale $\int \cos^b x\,dx$, au moyen de la relation

$$b\int \cos^b x\,dx = (b-1)\int \cos^{b-2} x\,dx + \sin x \cos^{b-1} x,$$

qui ramène, soit à $\int \cos x\,dx = \sin x$, soit à $\int dx = x$.

En considérant en second lieu l'expression $\int \Phi(x)\,dx$, j'écrirai pour abréger, comme à propos des fonctions rationnelles, p. 261,

$$\Phi(x) = \mathrm{C} + \Sigma \mathcal{A} \cot \tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \Sigma \mathcal{A}_1 \frac{d \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \Sigma \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n};$$

maintenant on voit comment la composition de cette formule conduit immédiatement au résultat. Nous n'avons, en effet,

qu'à déterminer la seule intégrale $\int \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx$; or on a

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)} = 2\,\frac{d\log\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx},$$

et, par conséquent,

$$\int \cot\frac{x-\alpha}{2}\,dx = 2\log\sin\tfrac{1}{2}(x-\alpha),$$

de sorte que

$$\int \Phi(x)\,dx = \mathrm{C}x + 2\,\Sigma\mathcal{A}\log\sin\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \Sigma\mathcal{B}_1\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \Sigma\mathcal{B}_n\,\frac{d^{n-1}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n-1}}.$$

Les relations

$$\Theta(x) = \Sigma\mathcal{A}\cot(x-\alpha) + \Sigma\mathcal{B}_1\,\frac{d\cot(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \Sigma\mathcal{B}_n\,\frac{d^n\cot(x-\alpha)}{dx^n},$$

$$\mathrm{H}(x) = \Sigma\mathcal{A}\,\mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha) + \Sigma\mathcal{B}_1\,\frac{d\,\mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \Sigma\mathcal{B}_n\,\frac{d^n\,\mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha)}{dx^n}$$

donneront pareillement

$$\int \Theta(x)\,dx = \Sigma\mathcal{A}\log\sin(x-\alpha) + \Sigma\mathcal{B}_1\cot(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \Sigma\mathcal{B}_n\,\frac{d^{n-1}\cot(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

$$\int \mathrm{H}(x)\,dx = \Sigma\mathcal{A}\log\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \Sigma\mathcal{B}_1\,\mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \Sigma\mathcal{B}_n\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha)}{dx^{n-1}}.$$

En effet, nous avons déjà

$$\int \cot(x-\alpha)\,dx = \log\sin(x-\alpha),$$

et, quant à l'intégrale

$$\int \mathrm{cos\acute{e}c}(x-\alpha)\,dx = \int \frac{dx}{\sin(x-\alpha)},$$

elle s'obtient, soit par l'équation

$$\frac{1}{\sin(x-\alpha)} = \tfrac{1}{2}[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)+\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)],$$

soit en posant

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)=t,$$

car il vient ainsi

$$\frac{1}{\sin(x-\alpha)} = \frac{1+t^2}{2t}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{\sin(x-\alpha)} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x-\alpha).$$

Voici quelques remarques sur ces résultats.

VI. Les expressions qui, en dehors des termes logarithmiques, à savoir

$$\mathcal{A}_1\cot(x-\alpha)+\mathcal{A}_2\frac{d\cot(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^{n-1}\cot(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

et

$$\mathcal{A}_1\operatorname{coséc}(x-\alpha)+\mathcal{A}_2\frac{d\operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^{n-1}\operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

composent, avec diverses valeurs des constantes $\mathcal{A}$ et α, les intégrales $\int\Theta(x)\,dx$, $\int \mathrm{H}(x)\,dx$, ont respectivement la même périodicité que $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$. La première, comme on l'a vu au § I, équivaut à un polynôme entier du degré n en $\cot(x-\alpha)$, la seconde donne lieu à la transformation suivante. Soit pour un moment

$$\operatorname{coséc}(x-\alpha)=u \quad \text{et} \quad \cot(x-\alpha)=t,$$

nous remarquerons qu'on peut écrire

$$u=-\sin(x-\alpha)\frac{dt}{dx},$$

de sorte qu'il vient successivement

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x-\alpha)\frac{d^2t}{dx^2}-\cos(x-\alpha)\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(x-\alpha)\left[\frac{d^3t}{dx^3}-\frac{dt}{dx}\right]-2\cos(x-\alpha)\frac{d^2t}{dx^2},$$

et, en général,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = -\sin(x-\alpha)\left[\frac{d^{k+1}t}{dx^{k+1}} - \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{d^{k-1}t}{dx^{k-1}} + \ldots\right]$$
$$-\cos(x-\alpha)\left[\frac{k}{1}\frac{d^k t}{dx^k} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\frac{d^{k-2}t}{dx^{k-2}} + \ldots\right].$$

Il en résulte qu'on peut donner à l'expression

$$\mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 \frac{du}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

d'abord la forme

$$\sin(x-\alpha)\left(G\frac{d^n t}{dx^n} + G_1\frac{d^{n-1}t}{dx^{n-1}} + \ldots\right)$$
$$+\cos(x-\alpha)\left(H\frac{d^{n-1}t}{dx^{n-1}} + H_1\frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} + \ldots\right),$$

les coefficients G et H étant constants; ensuite celle-ci

$$\sin(x-\alpha)\,F(t) + \cos(x-\alpha)\,F_1(t),$$

en désignant par $F(t)$ et $F_1(t)$ des polynômes en t des degrés $n+1$ et n; enfin au moyen des valeurs

$$\sin(x-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos(x-\alpha) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

on écrira

$$\mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 \frac{du}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{\mathfrak{F}(t)}{\sqrt{1+t^2}},$$

ce nouveau polynôme $\mathfrak{F}(t)$ étant du degré $n+1$. Sous ces formes nouvelles, les quantités qui entrent dans les deux intégrales sont parfois d'une détermination plus facile, et j'en donnerai quelques exemples.

Soit d'abord l'intégrale

$$\int \cot^{n+1} x\,dx,$$

l'exposant n étant entier et positif; d'après la méthode générale, on posera

$$\cot^{n+1} x = C + \mathcal{A}\cot x + \mathcal{A}_1 \frac{d\cot x}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot x}{dx^n},$$

et les coefficients s'obtiendront, soit au moyen des relations

$$\cot^2 x = -1 - \frac{d \cot x}{dx},$$

$$\cot^3 x = -\cot x + \frac{1}{2}\frac{d^2 \cot x}{dx^2},$$

$$\cot^4 x = \frac{4}{3} + \frac{d \cot x}{dx} - \frac{1}{6}\frac{d^3 \cot x}{dx^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

soit en formant la puissance $n+1$ ainsi que les dérivées de la série

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots,$$

et substituant dans l'équation pour identifier.

Or la variable $\cot x = t$, qui est indiquée par la forme connue d'avance de l'intégrale, en donne facilement la valeur, car ayant

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\int \frac{t^{n+1}\,dt}{1+t^2},$$

il suffira d'extraire la partie entière de la fraction $\frac{t^{n+1}}{1+t^2}$; si n est impair, on formera ainsi l'égalité

$$\frac{t^{n+1}}{1+t^2} = t^{n-1} - t^{n-3} + t^{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{1+t^2},$$

d'où

$$\int \frac{t^{n+1}\,dt}{1+t^2} = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n-2}}{n-2} + \frac{t^{n-4}}{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} t - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctang} t,$$

et, par conséquent,

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \frac{\cot^{n-4} x}{n-4} + \ldots$$
$$- (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cot x + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x.$$

Dans le cas de n pair, il viendra semblablement

$$\frac{t^{n+1}}{1+t^2} = t^{n-1} - t^{n-3} + t^{n-5} - \ldots - (-1)^{\frac{n}{2}} t + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} t}{1+t^2};$$

on en conclura alors

$$\int \cot^{n+1} x\,dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \frac{\cot^{n-4} x}{n-4} + \dots$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\cot^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \log \sin x.$$

Rapprochant ces résultats de l'expression donnée par la méthode générale, à savoir

$$\int \cot^{n+1} x\,dx = Cx + \mathcal{A} \log \sin x + \mathcal{A}_1 \cot x + \dots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot x}{dx^{n-1}},$$

nous en tirons cette conséquence que l'on a $\mathcal{A} = (-1)^{\frac{n}{2}}$ ou $\mathcal{A} = 0$, suivant que n est pair ou impair; et je m'y arrêterai un moment pour montrer en peu de mots comment cette seule connaissance du résidu $\mathcal{A}$ relatif à la valeur $x = 0$ de la fonction $\cot^{n+1} x$ suffit pour la détermination complète de la série

$$\cot x = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + \dots.$$

Et d'abord, de ce que le terme en $\frac{1}{x}$ manque dans le carré, la quatrième puissance et toutes les puissances paires, on conclut de proche en proche les conditions $b = 0$, $d = 0, \dots$, c'est-à-dire que le développement ne contient que des puissances impaires de la variable, et a la forme

$$\cot x = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma x^3 + \dots.$$

De ce que le coefficient du même terme est $+1, -1, +1, \dots$, dans la première, la troisième, la cinquième puissance, etc., on tire aisément les égalités

$$\alpha = 1, \quad 3\alpha^2\beta = -1, \quad 5\alpha^4\gamma + 10\alpha^3\beta^2 = 1, \dots,$$

d'où

$$\beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = -\frac{1}{45}, \dots.$$

Le développement de $\cot x$, auquel nous parvenons ainsi, est d'une grande importance en Analyse; en l'écrivant de cette

manière

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1.2} - \frac{2^4 B_2 x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

les coefficients

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \ldots$$

sont appelés les *nombres de Bernoulli* (*), et l'on a de même

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^2(2^2-1)B_1 x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)B_2 x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{x} + \frac{(2^2-2)B_1 x}{1.2} + \frac{(2^4-2)B_2 x^3}{1.2.3.4} + \frac{(2^6-2)B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Soit encore l'expression $\frac{1}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x}$, qui, en supposant $\alpha + \beta$ un nombre pair, aura, comme la précédente, la périodicité de $\Theta(x)$. Au lieu de déduire l'intégrale

$$\int \frac{1}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x}$$

de la relation

$$\frac{1}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x} = C + \mathcal{A} \cot x + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_\alpha \frac{d^\alpha \cot x}{dx^\alpha}$$
$$+ \mathcal{B} \operatorname{tang} x + \mathcal{B}_1 \frac{d \operatorname{tang} x}{dx} + \ldots + \mathcal{B}_\beta \frac{d^\beta \operatorname{tang} x}{dx^\beta},$$

nous ferons toujours $\cot x = t$, et l'on voit que la transformée

$$\int \frac{(1+t^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} dt}{t^{\beta+1}}$$

s'obtiendra facilement en développant la puissance $(1+t^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, dont l'exposant est entier dans l'hypothèse admise. Si nous faisons en particulier $\beta = -1$, $\alpha = 2n+1$, nous trouvons, en désignant par n_1, n_2, . . les coefficients de la puissance n

(*) Bertrand, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 347. — Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 217.

du binôme,

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+2}x} = -\cot x - \frac{n_1}{3}\cot^3 x - \frac{n_2}{5}\cot^5 x - \ldots - \frac{1}{2n+1}\cot^{2n+1}x;$$

puis, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+2}x} = \tang x + \frac{n_1}{3}\tang^3 x + \frac{n_2}{5}\tang^5 x + \ldots + \frac{1}{2n+1}\tang^{2n+1}x.$$

VII. L'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ se ramenant par la substitution $\sin x = X$ à cette forme

$$\int f(X, \sqrt{1-X^2})\frac{dX}{\sqrt{1-X^2}},$$

qui a été l'objet d'une étude antérieure, nous devrions maintenant comparer les deux procédés d'intégration, et les résultats auxquels ils conduisent. A cet égard, je me bornerai à remarquer qu'en faisant $\sin x = X$ dans la formule générale

$$\int \Phi(x)dx = Cx + 2\sum \mathcal{A} \log\sin\tfrac{1}{2}(x-\alpha)$$
$$+ \sum \mathcal{A}_1 \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \ldots + \sum \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

la partie transcendante est donnée par les termes Cx et

$$\int \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)dx = 2\log\sin\tfrac{1}{2}(x-\alpha),$$

dont le dernier prendra la forme suivante. Soient

$$Y = \sqrt{1-X^2}, \quad a = \sin\alpha, \quad b = \cos\alpha,$$

on aura

$$\int \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)dx = \int \frac{\sin(x-\alpha)}{1-\cos(x-\alpha)}dx = \int \frac{aY - bX}{1 - aX - bY}\frac{dX}{Y},$$

de sorte qu'au lieu de la fonction de troisième espèce amenée par la méthode d'intégration des radicaux carrés, à savoir

$$\int \frac{b\,dx}{(x-a)y} = \log\left(\frac{1 - ax - by}{x-a}\right),$$

nous sommes conduits à la quantité

$$\int \frac{ay - bx}{1 - ax - by}\,\frac{dx}{y} = \log(1 - ax - by).$$

Mais j'arrive, sans insister sur ce point (*), à une dernière considération, à la détermination de l'intégrale définie $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\,dx$. Reprenant, à cet effet, l'expression

$$f(\sin x, \cos x) = \mathrm{H}(x) + \Phi(x),$$

j'observe d'abord que la fonction $\Phi(x)$ devra être finie pour toutes les valeurs de la variable comprise de zéro à 2π, c'est-à-dire quel que soit x, puisqu'on a $\Phi(x + 2\pi) = \Phi(x)$; ainsi, dans les éléments simples $\cot\frac{1}{2}(x - \alpha)$, aucune des constantes α ne sera réelle. Ceci posé, les termes périodiques de l'intégrale indéfinie des fonctions $\mathrm{H}(x)$ et $\Phi(x)$, reprenant la même valeur aux limites $x = 0$ et $x = 2\pi$, ne figureront point dans le résultat, et nous aurons seulement à considérer le terme $\mathrm{C}x$, ainsi que la partie logarithmique $\Sigma\,\mathcal{A}\log\sin\frac{1}{2}(x - \alpha)$. Du premier résulte immédiatement la quantité $\mathrm{C}2\pi$; mais les termes transcendants demandent une attention particulière. Comme dans le cas plus simple de l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}},$$

traitée (p. 280), la relation

$$\int \cot\tfrac{1}{2}(x - \alpha)\,dx = 2\log\sin\frac{x - \alpha}{2}$$

ne détermine pas sur-le-champ, à cause des valeurs multiples

(*) On a, d'une manière plus générale,

$$\int \frac{(cb' - bc')x + (ac' - ca')y + ab' - ba'}{(ax + by + c)(a'x + b'y + c')}\,\frac{dx}{y} = \log\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'},$$

et l'on doit remarquer les cas particuliers dans lesquels cette intégrale ne devient indéfinie que pour deux valeurs de la variable. Ils se présentent lorsque les droites $ax + by + c = 0$, $a'x + b'x + c' = 0$ se coupent sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, ou lui sont tangentes.

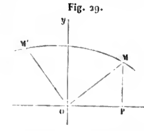
des logarithmes, l'intégrale définie prise entre des limites données x_0, x_1, et j'indiquerai d'abord de quelle manière on y parvient avant de supposer $x_0 = 0$ et $x_1 = 2\pi$.

Soient

$$z = a + b\sqrt{-1}, \quad \sin\tfrac{1}{2}(x - \alpha) = X + Y\sqrt{-1}.$$

Envisageant X et Y comme les coordonnées OP et MP (*fig.* 29) d'un point M rapporté à deux axes rectangulaires Ox et Oy, je figure la courbe MM' qui sera le lieu de ces points lorsque la variable x croîtra de x_0 à x_1. De cette manière, le rayon vecteur $OM = R$ et l'angle $MOx = \theta$ seront, à partir du point M, correspondant à $x = x_0$, des fonctions continues entièrement déterminées de la variable x. Remplaçant donc $\cot\frac{1}{2}(x - \alpha)$ par la dérivée logarithmique de

Fig. 29.



$$\sin\tfrac{1}{2}(x - \alpha) = X + Y\sqrt{-1} = R(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

il vient

$$\frac{1}{2}\int \cot\tfrac{1}{2}(x - \alpha)\,dx = \int \frac{dR}{R} + \int d\theta\sqrt{-1},$$

maintenant on a, sans aucune ambiguïté,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dR}{R} = \log OM' - \log OM, \quad \int_{x_0}^{x_1} d\theta = M'Ox - MOx,$$

et l'intégrale proposée se trouve déterminée. Mais arrivons aux limites zéro et 2π; si nous faisons pour un moment

$$A = \cos b\sqrt{-1} = \frac{e^b + 1}{2e^{\frac{1}{2}b}},$$

$$B = \frac{\sin b\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{e^b - 1}{2e^{\frac{1}{2}b}},$$

nous aurons

$$X = A\sin\tfrac{1}{2}(x - a), \quad Y = -B\cos\tfrac{1}{2}(x - a),$$

d'où

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1;$$

de sorte que la courbe MM' est une ellipse. Remarquant que A est toujours positif, je distingue deux cas, suivant que B sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que b sera lui-même positif ou négatif. Dans le premier, je pose

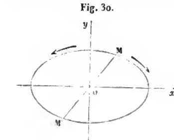
$$\frac{x-a}{2}=\frac{\pi}{2}+\varphi,$$

d'où

$$X=A\cos\varphi,\quad Y=B\sin\varphi;$$

cela étant, lorsque x croîtra de zéro à 2π, cette ellipse sera décrite dans le sens direct depuis un point M (*fig.* 30) jusqu'au point M' situé sur le prolongement du diamètre OM. En second lieu, lorsque B est négatif, je fais

Fig. 30.



$$\frac{x-a}{2}=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

ce qui donne

$$X=A\cos\varphi,\quad Y=-B\sin\varphi;$$

c'est alors du point M au point M' la seconde moitié de la courbe qui sera décrite dans le sens inverse. Cela étant, dans le premier cas, l'angle θ croît avec x, et nous avons

$$M'Ox=MOx+\pi;$$

dans le second, au contraire, il décroît, et nous passons de la valeur MOx à $M'Ox=MOx-\pi$; les deux rayons vecteurs OM et OM' sont d'ailleurs égaux, ce qui fait disparaître la partie logarithmique; par conséquent, en désignant par (b) une quantité égale à l'unité en valeur absolue et du signe de b, nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\cot\tfrac{1}{2}\left(x-a-b\sqrt{-1}\right)dx=2\pi(b)\sqrt{-1}.$$

Voici quelques applications de cette formule :

Posons

$$\lambda = \alpha\sqrt{-1}$$

dans la relation

$$\frac{2\sin\lambda}{\cos\lambda - \cos x} = \cot\frac{x-\lambda}{2} - \cot\frac{x+\lambda}{2}$$

établie p. 327, et soit $a = e^\alpha$; elle prendra cette forme

$$\frac{2(1-a^2)}{1-2a\cos x + a^2} = \sqrt{-1}\left(\cot\frac{x-\alpha\sqrt{-1}}{2} - \cot\frac{x+\alpha\sqrt{-1}}{2}\right),$$

et nous en conclurons successivement pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, c'est-à-dire en supposant $a < 1$ et $a > 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos x + a^2} = 2\pi, \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos x + a^2} = -2\pi.$$

Le second cas se déduit d'ailleurs immédiatement du premier par le changement de a en $\frac{1}{a}$.

Soit encore l'expression plus générale

$$\frac{\cos mx}{\cos\lambda - \cos x},$$

m étant un nombre entier quelconque; en faisant

$$e^{x\sqrt{-1}} = z,$$

elle devient

$$\frac{z^{2m}+1}{z^{m-1}(1-2z\cos\lambda + z^2)},$$

et contient par conséquent une partie entière qui s'obtient ainsi. Je pars de ces deux identités, faciles à vérifier,

$$\frac{\sin\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2} = \sin\lambda + z\sin 2\lambda + z^2\sin 3\lambda + \ldots + z^{m-2}\sin(m-2)\lambda$$
$$+ z^{m-1}\frac{\sin m\lambda - z\sin(m-1)\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2},$$

$$\frac{\sin\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2} = \frac{\sin\lambda}{z^2} + \frac{\sin 2\lambda}{z^3} + \frac{\sin 3\lambda}{z^4} + \ldots + \frac{\sin m\lambda}{z^{m+1}}$$
$$+ \frac{1}{z^{m+1}}\,\frac{z\sin(m+1)\lambda - \sin m\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2},$$

et je les ajoute membre à membre après avoir divisé la première par z^{m-1}, et multiplié la seconde par z^{m+1}; il vient

$$\frac{(z^{2m}+1)\sin\lambda}{z^{m-1}(1-2z\cos\lambda+z^2)} = (z^{m-1}+z^{1-m})\sin\lambda+(z^{m-2}+z^{2-m})\sin 2\lambda+\ldots$$
$$+(z+z^{-1})\sin(m-1)\lambda+\sin m\lambda$$
$$+\frac{z[\sin(m+1)\lambda-\sin(m-1)\lambda]}{1-2z\cos\lambda+z^2};$$

et, par conséquent, si l'on remplace z par l'exponentielle $e^{x\sqrt{-1}}$, nous aurons

$$\frac{\cos mx\sin\lambda}{\cos x-\cos\lambda} = \Pi(x)+\frac{\cos m\lambda\sin\lambda}{\cos x-\cos\lambda},$$

en faisant

$$\Pi(x) = 2\sin\lambda\cos(m-1)x+2\sin 2\lambda\cos(m-2)x+\ldots$$
$$+2\sin(m-1)\lambda\cos x+\sin m\lambda.$$

Le terme constant de la partie entière est $\sin m\lambda$; on en conclura, en faisant comme plus haut, $\lambda=\alpha\sqrt{-1}$, $e^\alpha=a$, ce qui donne

$$\sin m\lambda = \frac{1-a^{2m}}{2a^m\sqrt{-1}},\qquad \cos m\lambda = \frac{1+a^{2m}}{2a^m},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = 2\pi a^m \quad \text{pour} \quad a<1,$$

et

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = -\frac{2\pi}{a^m} \qquad \text{pour} \quad a>1.$$

Je considère en dernier lieu la quantité

$$\frac{\sin^2 x}{(\cos\lambda-\cos x)(\cos\mu-\cos x)};$$

la décomposition en éléments simples conduit d'abord à la relation

$$\frac{\sin^2 x}{(\cos\lambda-\cos x)(\cos\mu-\cos x)} = -1+\mathcal{A}\left(\cot\frac{x-\lambda}{2}-\cot\frac{x+\lambda}{2}\right)$$
$$+\mathcal{B}\left(\cot\frac{x-\mu}{2}-\cot\frac{x+\mu}{2}\right),$$

en posant

$$2\mathcal{A} = \frac{\sin\lambda}{\cos\mu-\cos\lambda},\qquad 2\mathcal{B} = \frac{\sin\mu}{\cos\lambda-\cos\mu}.$$

Faisant encore

$$\lambda = \alpha\sqrt{-1}, \quad \mu = \beta\sqrt{-1}, \quad a = e^{\alpha}, \quad b = e^{\beta},$$

nous trouverons, en nous bornant, pour abréger, au seul cas de $\alpha < 0$, $\beta < 0$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{4ab\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)} = -2\pi - (\mathcal{A}+\mathcal{B})4\pi\sqrt{-1};$$

or on a facilement

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \frac{1}{2}\cot\frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{1+ab}{1-ab},$$

d'où cette formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)} = \frac{\pi}{1-ab},$$

qui donne un résultat important en développant les deux membres suivant les puissances de a et b. Si nous employons, à cet effet, les relations

$$\frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2} = \sum a^m \sin(m+1)x,$$

$$\frac{\sin x}{1-2b\cos x+b^2} = \sum b^n \sin(n+1)x,$$

où m et n reçoivent toutes les valeurs entières de zéro à l'infini, on parvient à l'égalité suivante :

$$\sum a^m b^n \int_0^{2\pi} \sin(m+1)x\sin(n+1)x\,dx = \pi(1+ab+a^2b^2+\ldots),$$

dont le second membre ne renferme que les puissances du produit ab. Nous avons donc

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0$$

lorsque m et n sont différents, tandis qu'il vient, si on les suppose égaux,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi.$$

On trouve d'ailleurs directement ces relations au moyen des identités

$$2\sin mx \sin nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x,$$
$$2\sin^2 mx = 1 - \cos 2mx,$$

qui donnent les intégrales indéfinies

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)},$$
$$\int \sin^2 mx\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m};$$

et, par suite, comme on voit,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi.$$

En partant de celles-ci

$$2\sin mx \cos nx = \sin(m+n)x + \sin(m-n)x,$$
$$2\cos mx \cos nx = \cos(m+n)x + \cos(m-n)x,$$

nous aurons semblablement

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0,$$

même dans le cas de $m = n$, puis

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi.$$

Ces intégrales définies, qu'on obtient si facilement, conduisent, comme nous allons voir, à d'importantes conséquences.

VIII. Les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives d'une ou de plusieurs variables ont pour caractère essentiel d'être continues lorsqu'elles sont convergentes, et c'est en admettant cette condition de continuité qu'elles ont été employées dans les applications géométriques, et en particulier dans les théories du contact et de la courbure des lignes et des surfaces. Mais l'Analyse conduit à des séries d'une autre nature, qui, tout en restant convergentes

afin d'avoir une limite déterminée, ne sont plus nécessairement continues, et peuvent, lorsque la variable croît par degrés insensibles, représenter diverses successions de valeurs appartenant à des fonctions de formes tout à fait différentes. Un premier exemple en a déjà été donné, p. 284, et nous avons vu qu'en faisant

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

on a

$$f(x) = \frac{\pi}{4}$$

lorsque la variable est comprise entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, tandis qu'on obtient

$$f(x) = -\frac{\pi}{4}$$

quand on la suppose comprise entre $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque. Or ce résultat se rattache à une formule générale donnant un nouveau mode d'expression des fonctions d'une grande importance en Analyse, et que je vais indiquer succinctement.

Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction donnée entre les limites $x=a$, $x=b$, avec la seule condition d'être toujours finie; la suivante,

$$f(x) = \mathfrak{F}\left(a + \frac{b-a}{2\pi}x\right),$$

le sera de même depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$, et l'on prouve qu'elle peut se représenter de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_m \cos mx + \ldots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_m \sin mx + \ldots; \end{aligned}$$

voici maintenant, la possibilité du développement admise (*) comment se déterminent les coefficients. Le premier s'obtient en multipliant les deux membres par dx, et intégrant entre

(*) Je renverrai pour la démonstration rigoureuse au Mémoire célèbre de Dirichlet, sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données (*Journal de Crelle*, tome 4, p. 157).

les limites zéro et 2π; ayant, en effet,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin mx\,dx = 0,$$

il vient ainsi

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

J'opère ensuite d'une manière analogue en multipliant successivement par les facteurs $\cos mx\,dx$, $\sin mx\,dx$; les relations précédemment établies p. 348, à savoir

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\,dx = 0,$$

montrent que l'intégration entre les limites zéro et 2π éliminera tous les coefficients de la série, sauf A_m et B_m, qui seront respectivement multipliés par les quantités

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi,$$

et nous trouverons, par conséquent,

$$\pi A_m = \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx\,dx, \qquad \pi B_m = \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\,dx.$$

C'est cette expression de A_m et B_m, au moyen d'intégrales définies, qui donne le moyen de s'affranchir de la condition de continuité que suppose absolument le mode de détermination des coefficients de la série de Maclaurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots,$$

où figurent toutes les dérivées de $f(x)$ pour $x = x_0$. D'après la nature même de l'opération d'intégration, rien n'empêche, en effet, d'admettre qu'entre les limites zéro et 2π, et dans un nombre quelconque d'intervalles de zéro à x_1, x_1 à x_2,..., x_{n-1} à 2π, $f(x)$ coïncide successivement avec n fonctions dis-

tinctes $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, les expressions des coefficients devenant alors (p. 223)

$$2\pi A_0 = \int_0^{x_1} f_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{2\pi} f_n(x)\,dx,$$

$$\pi A_m = \int_0^{x_1} f_1(x)\cos mx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\cos mx\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)\cos mx\,dx,$$

$$\pi B_m = \int_0^{x_1} f_1(x)\sin mx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\sin mx\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)\sin mx\,dx.$$

Une circonstance qu'il importe aussi de ne pas omettre, c'est qu'à la limite de séparation de deux intervalles, pour $x = x_1$ par exemple, la série ne présente point l'ambiguïté de la fonction et a pour valeur $\frac{1}{2}[f_1(x_1) + f_2(x_1)]$; mais je me bornerai à énoncer ces résultats et à en faire l'application au cas d'une fonction $f(x)$ successivement égale à $+\frac{\pi}{4}$ entre $x = 0$, $x = \pi$, et à $-\frac{\pi}{4}$ entre $x = \pi$, $x = 2\pi$. On trouve alors immédiatement $A_0 = 0$; observant ensuite qu'on a

$$\int_0^{\pi} \cos mx\,dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \cos mx\,dx = 0,$$

nous en concluons semblablement $A_m = 0$; enfin les expressions

$$\int_0^{\pi} \sin mx\,dx = \frac{1 - \cos m\pi}{m}, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin mx\,dx = \frac{\cos m\pi - 1}{m}$$

donnent

$$\pi B_m = 2\,\frac{1 - \cos m\pi}{m},$$

et l'on retrouve bien la série

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots,$$

comme nous l'avions obtenue par une autre voie.

De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$.

1. Je me fonderai sur cette remarque que l'expression

$$e^{\omega x}\left(\mathrm{A}u + \mathrm{A}_1\frac{du}{dx} + \mathrm{A}_2\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_n\frac{d^nu}{dx^n}\right),$$

où u est une fonction quelconque de x, prend, si l'on pose $e^{\omega x}u = v$, la forme suivante

$$\mathcal{A}v + \mathcal{A}_1\frac{dv}{dx} + \mathcal{A}_2\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathcal{A}_n\frac{d^nv}{dx^n}.$$

En effet, nous avons successivement $u = e^{-\omega x}v$,

$$\frac{du}{dx} = e^{-\omega x}\left(-\omega v + \frac{dv}{dx}\right), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = e^{-\omega x}\left(\omega^2 v - 2\omega\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\right), \ldots,$$

et la substitution conduit au résultat annoncé, les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \ldots$ ayant ces valeurs

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathrm{A} - \mathrm{A}_1\omega + \mathrm{A}_2\omega^2 - \mathrm{A}_3\omega^3 + \ldots,\\
\mathcal{A}_1 &= -\mathrm{A}_1 + 2\mathrm{A}_2\omega - 3\mathrm{A}_3\omega^2 + \ldots = -\frac{d\mathcal{A}}{d\omega},\\
\mathcal{A}_2 &= \mathrm{A}_2 - 3\mathrm{A}_3\omega + \ldots = \tfrac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\omega^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qu'on obtient directement comme il suit. La fonction u étant quelconque, faisons en particulier $u = e^{hx}$, on en conclura $v = e^{(\omega+h)x}$, et la relation

$$\begin{aligned}
&e^{\omega x}\left(\mathrm{A}u + \mathrm{A}_1\frac{du}{dx} + \mathrm{A}_2\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_n\frac{d^nu}{dx^n}\right)\\
&\quad = \mathcal{A}v + \mathcal{A}_1\frac{dv}{dx} + \mathcal{A}_2\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathcal{A}_n\frac{d^nv}{dx^n}
\end{aligned}$$

donne ainsi, après avoir supprimé dans les deux membres le facteur exponentiel,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} + \mathrm{A}_1h + \mathrm{A}_2h^2 + \ldots + \mathrm{A}_nh^n\\
&\quad = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1(\omega + h) + \mathcal{A}_2(\omega + h)^2 + \ldots + \mathcal{A}_n(\omega + h)^n.
\end{aligned}$$

Changeons maintenant h en $h-\omega$, nous en concluons

$$\begin{aligned}&A + A_1(-\omega+h) + A_2(-\omega+h)^2 + \ldots\\ &\quad + A_n(-\omega+h)^n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 h + \mathcal{A}_2 h^2 + \ldots + \mathcal{A}_n h^n,\end{aligned}$$

et l'on voit que le développement du premier membre suivant les puissances de h donne bien pour les coefficients $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1, \ldots$ les valeurs précédemment obtenues.

Cela posé, nous tirerons de la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $f(x)$ la transformation suivante de l'expression $e^{\omega x}f(x)$. Soit, à cet effet, en désignant la partie entière par $F(x)$,

$$f(x) = F(x) + \sum \frac{A}{x-a} + \sum \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}},$$

ou plutôt, après avoir modifié convenablement les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$f(x) = F(x) + \Sigma A(x-a)^{-1} + \Sigma A_1 \frac{d(x-a)^{-1}}{dx} + \ldots + \Sigma A_n \frac{d^n(x-a)^{-1}}{dx^n};$$

je ferai, d'après la remarque précédente,

$$\begin{aligned}&e^{\omega x}\left[A(x-a)^{-1} + A_1 \frac{d(x-a)^{-1}}{dx} + \ldots + A_n \frac{d^n(x-a)^{-1}}{dx^n}\right]\\ &\quad = \mathcal{A}_0[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n}{dx^n}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}].\end{aligned}$$

Or, en ajoutant membre à membre les relations de même nature qui correspondent aux divers groupes de fractions simples, on trouvera cette expression :

$$\begin{aligned}e^{\omega x}f(x) = e^{\omega x}F(x) &+ \Sigma \mathcal{A}_0[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \Sigma \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots\\ &+ \Sigma \mathcal{A}_n \frac{d^n}{dx^n}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}],\end{aligned}$$

où les quantités $\dfrac{e^{\omega x}}{x-a}$ se montrent comme ayant, à l'égard de la fonction transcendante $e^{\omega x}f(x)$, le même rôle d'éléments simples que les fractions $\dfrac{1}{x-a}$ par rapport à la fonction ration-

nelle $f(x)$. Il en résulte que l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$ se trouve exprimée d'une part au moyen de celle-ci $\int e^{\omega x} \mathrm{F}(x)\,dx$, précédemment obtenue, p. 258, sous cette forme :

$$\int e^{\omega x} \mathrm{F}(x)\,dx = e^{\omega x}\left[\frac{\mathrm{F}(x)}{\omega} - \frac{\mathrm{F}'(x)}{\omega^2} + \frac{\mathrm{F}''(x)}{\omega^3} - \ldots\right];$$

en second lieu, par les expressions également explicites

$$\Sigma_c \mathcal{A}_1 [e^{\omega x}(x-a)^{-1}], \quad \Sigma_c \mathcal{A}_2 \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}], \ldots,$$

et enfin par la quantité

$$\Sigma_c \mathcal{A} \int e^{\omega x}(x-a)^{-1}\,dx,$$

où figure au fond, comme nous allons voir, une seule et unique transcendante. Soit, à cet effet, pour un instant

$$\varphi(z) = \int \frac{e^z\,dz}{z};$$

en faisant

$$z = \omega(x-a),$$

on aura

$$\varphi[\omega(x-a)] = \int \frac{e^{\omega(x-a)}\,dx}{x-a},$$

d'où

$$\int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = e^{\omega a}\varphi[\omega(x-a)],$$

et par conséquent

$$\Sigma_c \mathcal{A} \int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = \Sigma_c \mathcal{A}\, e^{\omega a}\varphi[\omega(x-a)].$$

La transcendante $\int \frac{e^z\,dz}{z}$, si l'on fait $e^z = x$, prend la forme $\int \frac{dx}{\log x}$ et reçoit la dénomination de *logarithme intégral*. On a démontré l'impossibilité de la représenter par des combinaisons en nombre fini de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles, d'où résulte qu'on doit l'en-

visager comme un élément analytique *sui generis*, dont la notion première s'est offerte, ainsi que celle des transcendantes elliptiques et abéliennes, par la voie du Calcul intégral. Elle a été l'objet de nombreux travaux, mais nous nous bornerons à mentionner à son égard une propriété singulière qui en montrera le rôle dans l'Arithmétique supérieure. Elle consiste en ce que l'intégrale définie $\int_a^b \frac{dx}{\log x}$ donne approximativement la valeur N du nombre des nombres premiers compris entre a et b, l'approximation étant d'autant plus grande que b est plus grand par rapport à a, et étant ainsi caractérisée que la limite du rapport de l'intégrale au nombre N est l'unité pour b infini.

II. Il existe une infinité de cas dans lesquels l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$ s'obtient sous forme finie explicite; il suffit pour cela que les diverses constantes $\mathcal{A}$ s'évanouissent. J'ajoute que ces conditions sont nécessaires si l'on veut que $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$ s'exprime au moyen d'une fonction rationnelle multipliée par $e^{\omega x}$. Il est aisé en effet de reconnaître l'impossibilité d'une relation de la forme suivante :

$$\Sigma \mathcal{A} \int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = e^{\omega x}\,\mathfrak{F}(x),$$

$\mathfrak{F}(x)$ étant en général une fonction algébrique, car en faisant $x = a + h$, et développant suivant les puissances croissantes de h, le premier membre contiendra la quantité $\mathcal{A} e^{\omega a} \log h$, et aucun terme logarithmique ne pourra dans l'hypothèse admise provenir du second membre. On voit par là toute l'importance des constantes $\mathcal{A}$; aussi nous allons en donner une détermination nouvelle, en déduisant à la fois et directement de la formule

$$e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x) + \Sigma \mathcal{A}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right] + \Sigma \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right] + \ldots$$

le groupe des coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$.

Soit à cet effet $x = a + h$; développons, comme tout à l'heure, suivant les puissances croissantes de h, et, en n'écrivant que les puissances négatives, posons

$$e^{\omega h} f(a+h) = A h^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + A_2 \frac{dh^{-2}}{dh^2} + \ldots,$$

d'où, par conséquent,

$$e^{\omega(a+h)} f(a+h) = e^{\omega a}\left(A h^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + A_2 \frac{dh^{-2}}{dh^2} + \ldots\right).$$

Or, dans le second membre, les termes en $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \ldots$ ne peuvent provenir que de la quantité $e^{\omega x}(x-a)^{-1}$ et de ses dérivées, qui donnent, en effet, en négligeant les puissanees positives,

$$e^{\omega x}(x-a)^{-1} = e^{\omega a} h^{-1} + \ldots,$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right] = e^{\omega a}\frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right] = e^{\omega a}\frac{d^2 h^{-1}}{dh^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

attendu que la dérivée de h par rapport à x est l'unité. L'expression suivante

$$e^{\omega a}\left(\mathcal{A} h^{-1} + \mathcal{A}_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \mathcal{A}_2 \frac{d^2 h^{-1}}{dh^2} + \ldots\right)$$

représente, par conséquent, la portion du développement du second membre qui renferme les puissanees négatives de h, et l'on voit qu'on a

$$\mathcal{A} = A, \quad \mathcal{A}_1 = A_1, \quad \mathcal{A}_2 = A_2, \ldots.$$

Soit, par exemple,

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{ax}\right)\left(1 - \frac{1}{bx}\right),$$

et prenons

$$\omega = a + b;$$

on multipliera le développement de l'exponentielle

$$e^{(a+b)h} = 1 + (a+b)h + (a+b)^2 \frac{h^2}{2} + \ldots$$

par la quantité

$$f(h) = \frac{1}{abh^2} - \frac{a+b}{abh} + 1,$$

ce qui donne

$$e^{(a+b)h} f(h) = \frac{1}{abh^2} - \frac{a^2+b^2}{2ab} + \ldots.$$

Or le terme en $\frac{1}{h}$ manquant, nous sommes assurés que l'intégrale est possible sous forme finie explicite; on a en effet

$$\int e^{(a+b)x}\left(1-\frac{1}{ax}\right)\left(1-\frac{1}{bx}\right)dx = e^{(a+b)x}\left[\frac{1}{a+b}-\frac{1}{abx}\right],$$

et l'on trouvera semblablement

$$\begin{aligned}
&\int e^{(a+b)x}\left(1-\frac{3}{ax}+\frac{3}{a^2x^2}\right)\left(1-\frac{3}{bx}+\frac{3}{b^2x^2}\right)dx \\
&\quad = \frac{e^{(a+b)x}}{a+b} + \frac{3(a^2+b^2)}{2a^2b^2}\frac{e^{(a+b)x}}{x} - \frac{3}{2a^2b^2}\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{(a+b)x}}{x}\right] \\
&\quad = e^{(a+b)x}\left[\frac{1}{a+b}-\frac{3}{abx}+\frac{3(a+b)}{a^2b^2x^2}-\frac{3}{a^2b^2x^3}\right].
\end{aligned}$$

III. J'ajouterai succinctement, en vue des intégrales

$$\int \cos\omega x f(x)\,dx, \quad \int \sin\omega x f(x)\,dx,$$

les conséquences auxquelles conduit la relation générale

$$e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\mathrm{F}(x) + \Sigma\mathcal{A}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots,$$

lorsqu'on y change ω en $\omega\sqrt{-1}$. En supposant pour plus de simplicité que dorénavant ω soit réel, ainsi que $f(x)$ et les quantités a, je remplacerai les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \ldots$ par $\mathcal{A}+\mathcal{A}'\sqrt{-1}$, $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}'_1\sqrt{-1}, \ldots$. Cette équation donne alors les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos\omega x f(x) = {} & \cos\omega x \mathrm{F}(x) + \Sigma\mathcal{A}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] - \Sigma\mathcal{A}'[\sin\omega x(x-a)^{-1}] \\
& + \Sigma\mathcal{A}_1\frac{d}{dx}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] - \Sigma\mathcal{A}'_1\frac{d}{dx}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\omega x f(x) = {} & \sin\omega x \mathrm{F}(x) + \Sigma\mathcal{A}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] + \Sigma\mathcal{A}'[\cos\omega x(x-a)^{-1}] \\
& + \Sigma\mathcal{A}_1\frac{d}{dx}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] + \Sigma\mathcal{A}'_1\frac{d}{dx}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit donc que les intégrales

$$\int \cos \omega x f(x)\,dx, \quad \int \sin \omega x f(x)\,dx$$

s'expriment en général par les transcendantes

$$\int \frac{\cos \omega x\,dx}{x-a}, \quad \int \frac{\sin \omega x\,dx}{x-a},$$

qui elles-mêmes se réduisent à celles-ci :

$$\int \frac{\cos z\,dz}{z}, \quad \int \frac{\sin z\,dz}{z}.$$

Nous voyons aussi qu'on obtiendra à la fois pour l'une et pour l'autre des valeurs sous forme finie explicite, lorsque les divers coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ s'évanouiront. Or, $\mathcal{A} + \mathcal{A}'\sqrt{-1}$ étant le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$e^{\omega h\sqrt{-1}} f(a+h) = \left(\cos \omega h + \sqrt{-1}\sin \omega h\right) f(a+h),$$

il en résulte qu'en supposant réelles, comme nous l'avons admis, les quantités ω et a, ainsi que la fonction $f(x)$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ seront aussi, à l'égard des fonctions

$$\cos \omega h f(a+h), \quad \sin \omega h f(a+h),$$

les coefficients des termes en $\frac{1}{h}$.

Soit, comme application, l'intégrale

$$\int \left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right) dx,$$

j'écrirai d'abord

$$\begin{aligned} 2\left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right)&\left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right) \\ &= \cos(a+b)x\left[1 - \frac{1}{abx^2}\right] - \sin(a+b)x\,\frac{a+b}{abx} \\ &+ \cos(a-b)x\left[1 + \frac{1}{abx^2}\right] + \sin(a-b)x\,\frac{a-b}{abx}, \end{aligned}$$

et nous serons conduits à une combinaison linéaire des quatre quantités

$$\int \frac{\cos(a+b)x\,dx}{x^2}, \int \frac{\sin(a+b)x\,dx}{x}, \int \frac{\cos(a-b)x\,dx}{x^2}, \int \frac{\sin(a-b)x\,dx}{x}$$

dont aucune ne peut s'obtenir, l'expression proposée s'exprimant néanmoins sous forme finie explicite. Supposons en effet, dans les formules précédentes,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \omega = a+b,$$

on aura

$$\frac{\cos(a+b)x}{x^2} = -(a+b)\frac{\sin(a+b)x}{x} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(a+b)x}{x}\right],$$

puis, en changeant b en $-b$,

$$\frac{\cos(a-b)x}{x^2} = -(a-b)\frac{\sin(a-b)x}{x} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(a-b)x}{x}\right].$$

Il en résulte, en intégrant,

$$\int\left[\frac{\cos(a+b)x}{x^2} + (a+b)\frac{\sin(a+b)x}{x}\right]dx = -\frac{\cos(a+b)x}{x},$$

$$\int\left[\frac{\cos(a-b)x}{x^2} - (a-b)\frac{\sin(a-b)x}{x}\right]dx = -\frac{\cos(a-b)x}{x},$$

et par conséquent ce résultat

$$\begin{aligned}2\int\left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right)dx \\ = -\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a+b)x}{abx} \\ -\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\cos(a-b)x}{abx}.\end{aligned}$$

C'est le cas le plus simple d'une proposition générale concernant les réduites successives

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{3x}{3-x^2}, \quad \frac{15x-x^3}{15-6x^2}, \ldots$$

de la fraction continue de Lambert

$$\tang x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5} - \cdots}}$$

Soit en général $\frac{P}{Q}$ la $n^{ième}$ réduite, P et Q étant des polynômes entiers en x, et posons

$$\varphi(x) = \frac{P\cos x - Q\sin x}{x^n},$$

l'intégrale $\int \varphi(ax)\varphi(bx)dx$ pourra toujours être obtenue sous forme finie explicite. La fonction $\varphi(x)$ donne aussi ce résultat

$$\int \frac{dx}{\varphi^2(x)} = \frac{P\sin x + Q\cos x}{P\cos x - Q\sin x};$$

c'est, sous une forme très-simple, la valeur d'une intégrale que nous n'avons point de méthode pour aborder, car elle n'appartient à aucune des catégories considérées jusqu'ici; on verra comment on y parvient facilement, dans la seconde partie du Cours.

Je remarquerai enfin que, en désignant par $F(\sin x, \cos x)$ un polynôme entier en $\sin x$ et $\cos x$, l'intégrale

$$\int F(\sin x, \cos x) f(x) dx$$

rentre dans celles que nous venons de traiter, ce polynôme pouvant être transformé en une fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de la variable. La quantité $\int \frac{\sin^n x}{x^m}\, dx$, par exemple, étant d'abord, abstraction faite d'un facteur constant, mise sous la forme

$$\int \sin^n x \frac{d^m(x^{-1})}{dx^m}\, dx,$$

sera immédiatement ramenée, au moyen de l'intégration par

parties, à celle-ci :

$$\int \frac{d^m \sin^n x}{dx^m} \frac{dx}{x}.$$

Or $\frac{d^m \sin^n x}{dx^m}$ est une somme de cosinus ou une somme de sinus de multiples de x, suivant que $m+n$ est pair ou impair; dans le premier cas, l'intégrale se réduit donc à $\int \frac{\cos z\, dz}{z}$, et dans le second à $\int \frac{\sin z}{z}\, dz$.

De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)\, dx$

I. La propriété caractéristique de la transcendante

$$e^{\omega x} f(\sin x, \cos x),$$

où $f(\sin x, \cos x)$ désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, consiste en ce qu'elle se reproduit multipliée par un facteur constant $e^{2\omega\pi}$, lorsqu'on y change x en $x + 2\pi$. Elle se rapproche ainsi des fonctions périodiques, et le procédé d'intégration résultera encore d'une décomposition en éléments simples, qu'on obtient comme il suit. Je pars, à cet effet, de la relation générale établie p. 223, à savoir

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x);$$

elle nous donne dans la fonction proposée une première partie $e^{\omega x}\Pi(x)$, qui en sera semblablement regardée comme la partie entière et dont l'intégration est immédiate. En effet, $\Pi(x)$ étant composée linéairement des quantités $\cos kx$, $\sin kx$, il suffit d'employer les formules obtenues p. 259,

$$\int e^{\omega x} \cos kx\, dx = \frac{e^{\omega x}(\omega \cos kx + k \sin kx)}{\omega^2 + k^2},$$

$$\int e^{\omega x} \sin kx\, dx = \frac{e^{\omega x}(\omega \sin kx - k \cos kx)}{\omega^2 + k^2}.$$

Maintenant nous parviendrons aux éléments simples, propres à la nouvelle transcendante, en appliquant la relation de la page 352 à la seconde partie $e^{\omega x}\Phi(x)$, c'est-à-dire aux quantités suivantes :

$$e^{\omega x}\left[\mathrm{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)+\mathrm{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathrm{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}\right],$$

qui, en conséquence, prendront cette nouvelle forme :

$$\mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]+\mathfrak{A}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]+\ldots$$
$$+\mathfrak{A}_n\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right].$$

Or, en faisant la somme d'expressions semblables, pour les différents systèmes de valeurs constantes A et α, nous trouverons pour formule de décomposition

$$\begin{aligned}
&e^{\omega x}f(\sin x,\cos x)\\
&=e^{\omega x}\Pi(x)+\mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]+\mathfrak{A}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]+\ldots\\
&\quad+\mathfrak{B}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right]+\mathfrak{B}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right]+\ldots\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\mathfrak{L}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)\right]+\mathfrak{L}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)\right]+\ldots
\end{aligned}$$

C'est, à l'égard de notre fonction, l'équivalent de la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles; les quantités qui jouent le rôle d'éléments simples étant

$$e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha),\quad e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta),\ldots,\quad e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda),$$

il en résulte qu'en faisant pour un instant

$$\varphi(x)=\int e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}x\,dx,$$

l'intégrale

$$\int e^{\omega x}f(\sin x,\cos x)\,dx$$

sera exprimée, d'une part, par la somme

$$\mathfrak{A}e^{\omega\alpha}\varphi(x-\alpha)+\mathfrak{B}e^{\omega\beta}\varphi(x-\beta)+\ldots+\mathfrak{L}e^{\omega\lambda}\varphi(x-\lambda),$$

et, de l'autre, au moyen de fonctions explicites de la variable. Les conditions $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0, \ldots$, $\mathfrak{L} = 0$ sont donc suffisantes pour que la partie non explicite disparaisse, et la valeur même de l'intégrale sera connue au moyen des divers coefficients $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots$. Il importe donc d'en avoir une détermination directe, et on l'obtient comme il suit.

II. En ayant en vue, pour fixer les idées, le groupe des quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1, \ldots$, $\mathfrak{A}_n$, nous ferons $x = \alpha + h$ dans la fonction proposée, et développant suivant les puissances ascendantes de h, nous représenterons les termes affectés des puissances négatives de cette quantité sous cette forme

$$e^{\omega(\alpha+h)} f[\sin(\alpha+h), \cos(\alpha+h)]$$
$$= e^{\omega\alpha}\left(\mathrm{A}h^{-1} + \mathrm{A}_1\frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + \mathrm{A}_n\frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right) + \ldots.$$

Or la relation

$$e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)$$
$$= e^{\omega x}\Pi(x) + \mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \mathfrak{A}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots$$
$$+ \mathfrak{B}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \mathfrak{B}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

montre que, pour $x = \alpha + h$, la partie suivante du second membre, savoir

$$\mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \mathfrak{A}_1\frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots$$

sera seule à donner des puissances négatives de h. Maintenant on trouve

$$e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) = e^{\omega\alpha}\left(\frac{2}{h} + 2\omega - \frac{h}{6} + \ldots\right),$$

puis, abstraction faite des puissances positives,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] = 2e^{\omega\alpha}\frac{d^n h^{-1}}{dh^n},$$

la dérivée de h par rapport à x étant l'unité; nous en con-

clurons que l'expression

$$2e^{\omega a}\left(\mathfrak{A}\,h^{-1}+\mathfrak{A}_1\frac{dh^{-1}}{dh}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right)$$

représente dans le développement du second membre tous les termes contenant des puissances négatives de h, de sorte que l'on aura

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2}A,\quad \mathfrak{A}_1=\frac{1}{2}A_1,\ldots,\quad \mathfrak{A}_n=\frac{1}{2}A_n.$$

Pour faire une application de ce résultat, nous considérerons la fonction

$$e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right),$$

qui devient infinie pour la seule valeur $x=0$, de sorte qu'il suffira de la développer suivant les puissances ascendantes de la variable. Or on a

$$e^{ax}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)=\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots\right)\left(-\frac{1}{x}+a+\frac{x}{12}+\ldots\right)$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{1+6a^2}{12}x+\ldots,$$

et pareillement

$$e^{bx}\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1+6b^2}{12}x+\ldots;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{x^2}+\ldots.$$

Le terme en $\frac{1}{x}$ manque, ainsi $A=0$; mettant ensuite $\frac{1}{x^2}$ sous la forme $-\frac{d(x^{-1})}{dx}$, on en conclut $A_1=-1$; par conséquent

$$\mathfrak{A}=0,\quad \mathfrak{A}_1=-\frac{1}{2}.$$

Maintenant nous devons calculer la partie entière $\Pi(x)$ de la fonction

$$\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right),$$

qui est simplement une constante. Or on a, d'après la règle établie, p. 328,

$$G = \left(a + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\left(b + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right), \quad H = \left(a - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\left(b - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right);$$

donc

$$\Pi(x) = \frac{G + H}{2} = ab - \frac{1}{4},$$

et nous obtenons, en conséquence, la relation

$$e^{(a+b)x}\left(a - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right) = e^{(a+b)x}\left(ab - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[e^{(a+b)x}\cot\frac{x}{2}\right],$$

d'où cette expression sous forme finie explicite de l'intégrale du premier membre, savoir

$$\int e^{(a+b)x}\left(a - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)dx = e^{(a+b)x}\left[\frac{4ab - 1}{4(a+b)} - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right].$$

Ce résultat est le cas le plus simple du théorème suivant, auquel nous serons amenés dans la seconde partie du Cours. Soit, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$F(x) = (x-1)^a(x+1)^{-a}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{n-a}(x+1)^{n+a}\right],$$

il est aisé de voir que $F(x)$ est un polynôme entier en x et en a du degré n; cela étant, je représenterai par $\mathfrak{F}(x, a)$ ce qu'il devient en y changeant x en $x\sqrt{-1}$ et a en $a\sqrt{-1}$, suppression faite du facteur $(\sqrt{-1})^n$. On aura ainsi pour $n = 1$

$$\mathfrak{F}(x) = 2(x - a),$$

pour $n = 2$

$$\mathfrak{F}(x) = 4(3x^2 - 3ax + a^2 + 1), \ldots;$$

or l'intégrale

$$\int e^{(a+b)x}\mathfrak{F}\left(\cot\frac{x}{2}, 2a\right)\mathfrak{F}\left(\cot\frac{x}{2}, 2b\right)dx,$$

ou encore celle-ci, qui s'y ramène,

$$\int e^{(a+b)x}\mathfrak{F}(\cot x, a)\,\mathfrak{F}(\cot x, b)\,dx,$$

s'expriment toujours sous forme finie explicite.

De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin x, \cos x)\,f_1(x)\,dx$.

I. Je supposerai que $f(\sin x, \cos x)$ soit une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, et $f_1(x)$ une fonction rationnelle de x sans partie entière; faisant ensuite, pour abréger,

$$\varphi(x) = f(\sin x, \cos x)\,f_1(x),$$

nous éviterons la considération de l'infini *à priori*, comme il s'offre dans l'expression proposée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx,$$

en la remplaçant par celle-ci

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta} \varphi(x)\,dx,$$

et cherchant sa limite lorsqu'on fait croître indéfiniment ε et η. En adoptant en outre pour ces quantités ces formes particulières

$$\varepsilon = 2m\pi, \quad \eta = 2(n+1)\pi,$$

où m et n sont des nombres entiers, je me fonderai sur une transformation remarquable et importante qui a été donnée par Legendre dans les *Exercices de Calcul intégral*, et par Poisson dans son *Mémoire sur les intégrales définies* (*Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] cahier, p. 630). Elle consiste à décomposer l'intégrale en une somme d'autres de même forme dont les limites soient des multiples consécutifs de 2π, en

écrivant

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)dx = \int_{-2m\pi}^{-2(m-1)\pi} \varphi(x)dx$$
$$+ \int_{-2(m-1)\pi}^{-2(m-2)\pi} \varphi(x)dx + \dots$$
$$+ \int_{-2\pi}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)dx$$
$$+ \int_{2\pi}^{4\pi} \varphi(x)dx + \dots + \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \varphi(x)dx,$$

ou bien, pour abréger,

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)dx = \sum_{k=-m}^{k=+n} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)dx.$$

Cela étant, nous ferons dans le second membre $x = z + 2k\pi$, ce qui donnera

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \varphi(z + 2k\pi)dz,$$

et, par conséquent,

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)dx = \sum_{k=-m}^{k=+n} \int_{0}^{2\pi} \varphi(z + 2k\pi)dz,$$

ou encore

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \Phi(x)dx,$$

en posant

$$\Phi(x) = \sum_{k=-m}^{k=+n} \varphi(x + 2k\pi).$$

Nous rencontrons ainsi l'expression analytique d'une fonction périodique qui a été indiquée dans l'Introduction, p. 43, et sous la condition qu'en faisant croître indéfiniment m et n la série

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \varphi(x + 2\pi) + \dots + \varphi(x + 2n\pi)$$
$$+ \varphi(x - 2\pi) + \dots + \varphi(x - 2m\pi)$$

soit convergente, nous aurons

$$\Phi(x+2\pi) = \Phi(x).$$

Or cette transformation donne la valeur de l'intégrale définie proposée; je dis, en effet, que $\Phi(x)$ s'exprime par une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ lorsqu'on suppose, comme nous l'avons admis,

$$\varphi(x) = f(\sin x, \cos x) f_1(x).$$

II. Je me servirai pour le faire voir de la formule suivante, qui sera démontrée dans le Cours de seconde année, savoir

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{1}{x+2k\pi} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{n}{m} + \frac{x+\pi}{4m\pi} + \frac{x-\pi}{4n\pi} + \ldots,$$

où les termes non écrits contiennent en dénominateur le carré et les puissances plus élevées de m et n. Elle fait voir que la série du premier membre appartient à l'espèce des suites semi-convergentes, de sorte qu'elle ne représentera $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ qu'en supposant le rapport $\frac{m}{n}$ égal à l'unité pour m et n infinis. Mais, en général, soit λ la limite de la constante $\frac{1}{2\pi}\log\frac{m}{n}$ lorsqu'on fait croître indéfiniment m et n, ce qui donnera

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{1}{x+2k\pi} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \lambda;$$

nous remarquerons que cette quantité disparaît dans l'expression des dérivées successives du premier membre, qui sont ainsi des séries absolument convergentes, dont la formule nous donne les valeurs, à savoir

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{d(x+2k\pi)^{-1}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\cot\frac{x}{2}}{dx}, \quad \sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{d^2(x+2k\pi)^{-1}}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2\cot\frac{x}{2}}{dx^2}, \ldots.$$

Cela étant, il suffit d'observer qu'ayant, par la décomposition

en fractions simples,

$$f_1(x) = \sum \frac{A}{x - a} + \sum \frac{A_1}{(x - \alpha)^2} + \ldots + \sum \frac{A_n}{(x - \alpha)^n},$$

ou plutôt

$$f_1(x) = \sum A(x - \alpha)^{-1} + \sum A_1 \frac{d(x - \alpha)^{-1}}{dx} + \ldots + \sum A_n \frac{d^n(x - \alpha)^{-1}}{dx^n},$$

on en conclut sur-le-champ

$$\sum_{k=-m}^{k=+m} f_1(x + 2k\pi) = \lambda \sum A + \frac{1}{2} \sum A \cot \frac{1}{2}(x - \alpha) + \frac{1}{2} \sum A_1 \frac{d \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)}{dx}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2} \sum A_n \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)}{dx^n}.$$

Nous obtenons ainsi une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$; or, ayant $\varphi(x) = f(\sin x, \cos x) f_1(x)$, d'où

$$\Phi(x) = f(\sin x, \cos x) \sum_{k=-m}^{k=+n} f_1(x + 2k\pi),$$

on voit que $\Phi(x)$ est aussi une expression de même nature. Ajoutons que, dans l'intégrale $\int_0^{2\pi} \Phi(x)dx$, à laquelle se trouve ramenée la proposée, la quantité indéterminée λ a pour coefficient

$$\Sigma A \int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)dx;$$

elle aura donc une valeur entièrement déterminée sous l'une ou l'autre de ces deux conditions

$$\Sigma A = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)dx = 0.$$

Il ne sera pas inutile, avant de faire des applications de ce résultat, de présenter sur l'intégrale indéfinie

$$\int f(\sin x, \cos x) f_1(x) dx$$

quelques remarques qui montreront comment elle diffère de celles que nous avons précédemment considérées.

III. Soit, en partant de la formule de décomposition en éléments simples,

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x),$$

nous en conclurons

$$\int f(\sin x, \cos x) f_1(x)\,dx = \int \Pi(x) f_1(x)\,dx + \int \Phi(x) f_1(x)\,dx;$$

or la première partie

$$\int \Pi(x) f_1(x)\,dx$$

nous est déjà connue, et il a été établi (p. 358) qu'elle s'exprime au moyen de fonctions explicites et des transcendantes

$$\int \frac{\cos mx\,dx}{x-\alpha}, \quad \int \frac{\sin mx\,dx}{x-\alpha},$$

m étant un nombre entier, et les quantités α désignant les racines du dénominateur de $f_1(x)$ égalé à zéro. A l'égard de la seconde intégrale

$$\int \Phi(x) f_1(x)\,dx,$$

nous ferons, en admettant pour plus de généralité une partie entière,

$$f_1(x) = \mathrm{F}(x) + \Sigma \mathrm{A}(x-\alpha)^{-1} + \Sigma \mathrm{A}_1 \frac{d(x-\alpha)^{-1}}{dx} + \ldots + \Sigma \mathrm{A}_n \frac{d^n(x-\alpha)^{-1}}{dx^n},$$

et elle se trouvera décomposée en termes de ces deux formes, savoir

$$\int \mathrm{F}(x)\Phi(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int \frac{d^m(x-\alpha)^{-1}}{dx^m}\Phi(x)\,dx.$$

Ces deux termes se décomposeront eux-mêmes, si l'on emploie la formule

$$\Phi(x) = \Sigma \mathcal{A} \cot\tfrac{1}{2}(x-a) + \Sigma \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx} + \Sigma \mathcal{A}_2 \frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^2} + \ldots,$$

dans les suivants :

$$\int F(x)\frac{d^n \cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}dx, \quad \int \frac{d^m(x-\alpha)^{-1}}{dx^m}\frac{d^n \cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}dx.$$

On tire enfin de l'intégration par partie, c'est-à-dire de la relation

$$\int U\frac{d^n V}{dx^n}dx = \Theta + (-1)^n\int V\frac{d^n U}{dx^n}dx$$

(p. 257) une dernière réduction donnant, d'une part, des fonctions explicites de la variable et de l'autre les intégrales

$$\int \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^n F(x)}{dx^n}dx, \quad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^{m+n}(x-\alpha)^{-1}}{dx^{m+n}}dx.$$

Les éléments simples auxquels nous sommes ainsi amenés, si l'on observe que $\frac{d^n F(x)}{dx^n}$ est un polynôme entier dont le degré peut être quelconque, sont donc les divers termes de ces deux séries :

$$\int \cot\frac{1}{2}(x-a)x\,dx, \quad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)x^2dx, \quad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)x^3dx, \ldots,$$

$$\int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)dx}{x-\alpha}, \quad \int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)dx}{(x-\alpha)^2}, \quad \int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)dx}{(x-\alpha)^3}, \ldots,$$

dont les uns rappellent la forme analytique des intégrales elliptiques et abéliennes de première et de seconde espèce, les autres celle des fonctions de troisième espèce (p. 296). Mais on ne connaît entre eux aucune relation qui permette de les ramener les uns aux autres, et ils constituent sans doute des transcendantes distinctes. Nous voyons par là combien l'intégrale

$$\int f(\sin x, \cos x)f_1(x)dx$$

est d'une nature analytique plus complexe que toutes celles dont nous nous sommes déjà occupés; toutefois, les calculs par lesquels nous la réduisons généralement aux éléments simples définis précédemment en donneront la valeur sous forme finie explicite lorsqu'ils disparaîtront du résultat. On en tire aussi cette conclusion, que l'intégrale définie prise

entre limites $-\infty$ et $+\infty$ dépend uniquement des quantités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\,dx}{x-\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x-\alpha},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^n(x-\alpha)^{-1}}{dx^n}\,dx,$$

en excluant l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)x^n dx$, qui est amenée par la partie entière $F(x)$ de la fonction $f_1(x)$, et dont la valeur serait infinie ou indéterminée. Or on peut leur substituer, comme nous avons vu, celles-ci :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx, \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin mx \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^n \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}\,dx,$$

dont voici la détermination.

IV. Nous considérerons en même temps les deux premières, et j'appliquerai, comme s'il s'agissait d'obtenir les intégrales indéfinies, la méthode générale exigeant qu'on mette sous la forme $\Pi(x)+\Phi(x)$ les fonctions

$$\cos mx \cot\frac{1}{2}(x-a), \quad \sin mx \cot\frac{1}{2}(x-a),$$

afin de donner un dernier exemple de ces transformations. Formant pour cela la combinaison

$$\cos mx \cot\frac{1}{2}(x-a) + \sqrt{-1}\sin mx \cot\frac{1}{2}(x-a),$$

dont la transformée en $z = e^{x\sqrt{-1}}$ sera

$$z^m \frac{z+a}{z-a}\sqrt{-1},$$

si l'on fait $a = e^{a\sqrt{-1}}$, nous n'aurons qu'à extraire la partie entière de la fraction en écrivant

$$z^m \frac{z+a}{z-a} = z^m + 2az^{m-1} + 2a^2 z^{m-2} + \ldots + 2a^m + \frac{2a^{m+1}}{z-a}.$$

Qu'on remplace maintenant z et a par leurs valeurs, la quantité $\frac{2a^{m+1}}{z-a}$ par

$$-a^m\left[1+\sqrt{-1}\cot\frac{1}{2}(x-a)\right],$$

en égalant les parties réelles et les parties imaginaires, il viendra aisément

$$\begin{aligned}\cos mx\cot\frac{1}{2}(x-a) &= -\sin mx - 2\sin[(m-1)x+a]\\ &\quad -2\sin[(m-2)x+2a]-\ldots-2\sin[x+(m-1)a]\\ &\quad -\sin ma+\cos ma\cot\frac{1}{2}(x-a),\\ \sin mx\cot\frac{1}{2}(x-a) &= \cos mx+2\cos[(m-1)x+a]\\ &\quad +2\cos[(m-2)x+2a]+\ldots+2\cos[x+(m-1)a]\\ &\quad +\cos ma+\sin ma\cot\frac{1}{2}(x-a).\end{aligned}$$

Nous tirons de ces égalités

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cot\frac{1}{2}(x-a)dx = -2\pi\sin ma+\cos ma\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a)dx,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cot\frac{1}{2}(x-a)dx = -2\pi\cos ma+\sin ma\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a)dx.$$

Or on a établi (p. 344) qu'en supposant

$$a=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a)dx$$

a pour valeur $+2\pi\sqrt{-1}$ ou $-2\pi\sqrt{-1}$, suivant que β est positif ou négatif; dans le premier cas, nous aurons donc

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx$$
$$=2\pi(-\sin ma+\sqrt{-1}\cos ma)=2\pi\sqrt{-1}\,e^{ma\sqrt{-1}},$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx$$
$$=2\pi(\cos ma+\sqrt{-1}\sin ma)=2\pi e^{ma\sqrt{-1}}$$

et dans le second

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx$$
$$= 2\pi\left(-\sin ma - \sqrt{-1}\cos ma\right) = -2\pi\sqrt{-1}\,e^{-ma\sqrt{-1}},$$
$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx$$
$$= 2\pi\left(\cos ma - \sqrt{-1}\sin ma\right) = 2\pi e^{-ma\sqrt{-1}}.$$

Considérant ensuite l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\,dx,$$

nous partirons, en supposant d'abord $n=0$, de la formule

$$\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\cot\frac{1}{2}(x-a) = -1$$
$$+\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)\left[\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)-\cot\frac{1}{2}(x-a)\right];$$

on en tirera, en désignant par (a) et (α) des quantités égales à l'unité en valeur absolue, et du signe des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans a et α,

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx = -2\pi$$
$$+2\pi\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)\left[(\alpha)-(a)\right]\sqrt{-1}.$$

Supposant ensuite $n>0$, la partie entière qui était tout à l'heure une constante n'existe plus, et la décomposition en éléments simples donne l'égalité

$$\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n} = \mathcal{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)+\mathrm{A}\cot\frac{1}{2}(x-a)$$
$$+\mathrm{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx}+\ldots$$
$$+\mathrm{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n},$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}dx = 2\pi[\mathcal{A}(\alpha)+A(a)]\sqrt{-1}.$$

Or la relation générale établie p. 328,

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}+\ldots+\mathcal{L}=\frac{G-H}{2}\sqrt{-1},$$

conduit, dans le cas actuel, à la condition $\mathcal{A}+A=0$, les quantités G et H étant nulles quand n est égal ou supérieur à l'unité. Ayant donc immédiatement

$$\mathcal{A}=\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)}{d\alpha^n},$$

on en conclut la valeur suivante :

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}dx = 2\pi\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)}{d\alpha^n}[(\alpha)-(a)]\sqrt{-1}.$$

Mais le cas particulier de $a=\alpha$ fait exception, car alors on doit poser

$$\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n} = \mathcal{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)+\mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}+\ldots$$
$$+\mathcal{A}_{n+1}\frac{d^{n+1}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n+1}};$$

or un calcul très-facile donne $\mathcal{A}=0$; l'intégrale, dans ce cas, est donc toujours nulle, sauf le cas unique de $n=0$, ou la relation

$$\cot^2\frac{1}{2}(x-\alpha)=-1-2\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}$$

conduit à la valeur

$$\int_0^{2\pi}\cot^2\frac{1}{2}(x-\alpha)dx=-2\pi.$$

V. Pour passer des résultats que nous venons d'obtenir aux

valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx\,dx}{x-a},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx\,dx}{x-a},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\,dx,$$

il ne nous reste plus qu'à considérer le coefficient de l'indéterminée λ, afin de reconnaître si elles ont, en effet, une valeur entièrement déterminée. Or, à l'égard des deux premières, les facteurs

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx,\quad \int_0^{2\pi}\sin mx\,dx$$

étant nuls, ce coefficient s'évanouit, et nous avons par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx\,dx}{x-a}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos mx\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx=\pi\sqrt{-1}\,e^{ma\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx\,dx}{x-a}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sin mx\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx=\pi e^{ma\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx\,dx}{x-a}=-\pi\sqrt{-1}\,e^{-ma\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx\,dx}{x-a}=\pi e^{-ma\sqrt{-1}},$$

suivant que le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans a est positif ou négatif.

Relativement à la troisième intégrale, la quantité

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx$$

est toujours différente de zéro; mais l'autre facteur, qui est l'unique résidu de $\frac{d^n(x-a)^{-1}}{dx^n}$ est nul pour toute valeur de n, sauf dans le cas de $n=0$; l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx}{x-a}$$

est donc seule indéterminée, et l'on a généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n(x-a)^{-1}}{dx^n}dx = \pi\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)}{d\alpha^n}[(\alpha)-(a)]\sqrt{-1}.$$

Observons enfin que les constantes a et α doivent être imaginaires pour que les quantités

$$\frac{1}{x-a}, \quad \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)$$

ne deviennent point infinies entre les limites des intégrations. Une exception importante est toutefois à remarquer; elle concerne l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}dx,$$

la fonction $\frac{\sin mx}{x}$ restant finie pour $x = 0$. La valeur qu'on obtient alors, savoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}dx = \pi,$$

offre cette circonstance, qu'il est aisé d'expliquer, d'être indépendante de m. Effectivement, si l'on fait $mx = z$, m disparaît, et l'on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}dz.$$

La même substitution permet semblablement de ramener les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\,dx}{x-a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x-a},$$

où m est non-seulement un nombre entier, mais une quantité réelle quelconque, au seul cas de $m = 1$, car on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\,dx}{x-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos z\,dz}{z-ma},$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z\,dz}{z-ma}.$$

Mais, en donnant, comme nous l'avons fait, à la transformée en z les limites $-\infty$ et $+\infty$, nous avons supposé implicitement m positif, et dans l'hypothèse contraire les limites doivent être interverties, de sorte qu'on aura alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = -\pi.$$

De là ce fait remarquable et important en Analyse, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x}$, envisagée comme fonction de m, est constante et égale à $+\pi$ ou à $-\pi$, suivant que la variable est positive ou négative. Mais voici encore d'autres exemples de fonctions discontinues obtenues sous forme d'intégrales définies. Considérons les expressions

$$\int \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3}\,dx,$$

que je vais d'abord réduire par la méthode générale à des quantités explicites et aux transcendantes

$$\int \frac{\cos mx\,dx}{x}, \quad \int \frac{\sin mx\,dx}{x}.$$

Faisant, à cet effet, pour un instant

$$\mathrm{U} = \sin ax \sin bx, \quad \mathrm{V} = \sin ax \sin bx \sin cx,$$

j'aurai d'abord

$$\int \frac{\mathrm{U}\,dx}{x^2} = -\int \mathrm{U}\,d(x^{-1}) = -x^{-1} + \int x^{-1} \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx,$$

$$\int \frac{\mathrm{V}\,dx}{x^3} = \frac{1}{2}\int \mathrm{V}\frac{d^2(x^{-1})}{dx^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{V}\frac{d(x^{-1})}{dx} - \frac{d\mathrm{V}}{dx}x^{-1}\right] + \frac{1}{2}\int x^{-1}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,dx,$$

et les identités

$$2\mathrm{U} = \cos(a-b)x - \cos(a+b)x,$$

$$4\mathrm{V} = \sin(a+b-c)x + \sin(b+c-a)x + \sin(c+a-b)x \\ - \sin(a+b+c)x$$

donneront immédiatement

$$2\frac{dU}{dx} = -(a-b)\sin(a-b)x + (a+b)\sin(a+b)x,$$

$$4\frac{d^2V}{dx^2} = -(a+b-c)^2\sin(a+b-c)x - (b+c-a)^2\sin(b+c-a)x$$
$$-(c+a-b)^2\sin(c+a-b)x + (a+b+c)^2\sin(a+b+c)x.$$

Nous tirerons de là, en observant que les quantités en dehors des intégrales s'évanouissent aux limites $x = -\infty$, $x = +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = -\frac{a-b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx$$
$$+\frac{a+b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx;$$

or, a et b étant positifs, on en conclura, pour $a-b>0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = -\frac{a-b}{2}\pi + \frac{a+b}{2}\pi = b\pi,$$

et pour $a-b<0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \frac{a-b}{2}\pi + \frac{a+b}{2}\pi = a\pi;$$

de sorte que l'intégrale a pour valeur le produit par π du plus petit des nombres a et b.

Maintenant la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3}\,dx$$
$$= -\frac{(a+b-c)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b-c)x}{x}\,dx$$
$$-\frac{(b+c-a)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(b+c-a)x}{x}\,dx$$
$$-\frac{(c+a-b)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c+a-b)x}{x}\,dx$$
$$+\frac{(a+b+c)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b+c)x}{x}\,dx$$

aura semblablement pour conséquence que l'intégrale du premier membre, sous les conditions

$$a+b-c>0,\quad b+c-a>0,\quad c+a-b>0,$$

sera la quantité

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)\frac{\pi}{4};$$

tandis qu'en renversant le premier, le second ou le troisième signe d'inégalité, elle aura pour valeur $ab\pi$, $bc\pi$ ou $ac\pi$. Les hypothèses faites sont d'ailleurs, comme on sait, les seules possibles, en admettant que les constantes a, b, c soient positives.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

CALCUL INTÉGRAL.

Remarques préliminaires.

I. Les applications du Calcul intégral à la Géométrie devant conduire à employer les diverses méthodes qui viennent d'être exposées pour la recherche des intégrales indéfinies, nous allons en présenter un résumé succinct, en nous limitant à ce qu'elles offrent d'essentiel. En premier lieu, à l'égard de ces expressions

$$\int f(x)\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx, \quad \int e^{\omega x} f(x)\,dx,$$
$$\int e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

où $f(x)$ désigne une fonction rationnelle de la variable, et $f(\sin x, \cos x)$ une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, le procédé consiste uniquement dans les transformations suivantes, appelées *décomposition en éléments simples* des quantités à intégrer, savoir

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \sum \mathrm{A}(x-a)^{-1} + \ldots + \sum \mathrm{A}_n \frac{d^n (x-a)^{-1}}{dx^n},$$

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \sum \mathrm{A} \cot \tfrac{1}{2}(x-a) + \ldots + \sum \mathrm{A}_n \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(x-a)}{dx},$$

$$e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\mathrm{F}(x) + \sum \mathrm{A}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right] + \ldots + \sum \mathrm{A}_n \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}(x-a)^{-1}\right],$$

$$e^{\omega x} f(\sin x, \cos x) = e^{\omega x}\Pi(x) + \sum \mathrm{A}\left[e^{\omega x}\cot \tfrac{1}{2}(x-a)\right] + \ldots$$
$$+ \sum \mathrm{A}_n \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}\cot \tfrac{1}{2}(x-a)\right].$$

On en tire ces développements suivant les puissances croissantes de h, qui, en n'écrivant que les puissances négatives, sont tous de même forme, et conduisent dans les divers cas au même mode de détermination des coefficients $A, A_1, \ldots, A_n$, savoir

$$f(a+h) = Ah^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + A_n \frac{d^n h^{-1}}{dh^n},$$

$$f[\sin(a+h), \cos(a+h)] = 2\left(Ah^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + A_n \frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right),$$

$$e^{\omega h} f(a+h) = Ah^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + A_n \frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\Big),$$

$$e^{\omega h} f[\sin(a+h), \cos(a+h)] = 2\left(Ah^{-1} + A_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + A_n \frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right),$$

En second lieu, et à l'égard des différentielles algébriques, dans le cas simple d'une fonction rationnelle de la variable et de la racine carrée d'un polynôme entier, la méthode qui donne la valeur algébrique de l'intégrale, quand elle peut être obtenue sous cette forme, consiste simplement à les réduire aux expressions nommées *fonctions de première, de seconde et de troisième espèce* (*). Enfin, dans le cas plus général de

(*) Abel a fait voir que ces réductions pouvaient s'étendre aux intégrales de différentielles algébriques quelconques; mais, en ouvrant la voie, il n'avait encore fait que les premiers pas dans ces belles et difficiles questions. C'est Riemann qui a, le premier, donné la notion analytique complète et découvert la véritable nature des intégrales de première, de seconde et de troisième espèce, où entre la racine y d'une équation algébrique quelconque

$$F(x, y) = 0.$$

Renvoyant sur ce sujet aux travaux de l'illustre auteur (*Théorie des fonctions abéliennes*, *Journal de Crelle*, t. 54) et à la théorie des fonctions abeliennes de MM. Clebsch et Gordan, je ne puis omettre de mentionner au moins ce résultat, que le nombre des fonctions de première espèce est déterminé par la formule

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r,$$

où n est le degré de l'équation $F(x, y) = 0$, d le nombre des points doubles, et r le nombre des points de rebroussement de la courbe obtenue en considérant x et y comme des coordonnées rectilignes. Ce nombre p caractérise le mode d'existence de la fonction algébrique définie par la relation $F(x, y) = 0$;

l'intégrale $\int f(x, y)dx$, où $f(x, y)$ est une fonction rationnelle de la variable indépendante et de la racine d'une équation algébrique de degré quelconque $F(x, y) = 0$, nous avons obtenu, lorsque la courbe représentée par cette équation est unicursale, le changement de variables qui le ramène à l'intégrale d'une simple fonction rationnelle. La méthode exige alors qu'on détermine le système complet des points doubles, et, par conséquent, des valeurs de x et y satisfaisant aux conditions

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0;$$

voici en quelques mots, avant d'en présenter des applications, un résultat important, que donne sur ce sujet la théorie des polaires réciproques.

II. La polaire de la courbe $F(x, y) = 0$ par rapport au cercle imaginaire $x^2 + y^2 + 1 = 0$ étant considérée comme l'enveloppe des positions de la droite $xX + yY + 1 = 0$, si nous supposons y déterminé en fonction de x par la condition $F(x, y) = 0$, on formera son équation comme il suit, d'après la méthode donnée p. 191. Différentiant par rapport au paramètre variable, il viendra

$$X + \frac{dy}{dx} Y = 0,$$

---

en supposant, par exemple, $p = 0$, on peut exprimer x et y par une variable auxiliaire θ (Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen; Die eindeutigen Transformationen*, p. 67) et ramener par conséquent l'intégrale

$$\int f(x, y)dx$$

à celle d'une fonction rationnelle en θ. A ce cas appartiennent donc les équations représentant des courbes unicursales, et dont nous nous sommes occupé en nous plaçant au point de vue de l'intégration par substitution. En supposant ensuite $p = 1$, les variables peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles de θ et d'un radical carré portant sur un polynôme du 3e ou du 4e degré, etc. On voit ainsi dans les parties élevées du Calcul intégral toute l'importance de la considération des points doubles, et comment elle devient l'un de ces liens que la science de notre époque, et surtout les beaux travaux de M. Clebsch, ont révélés entre la Géométrie supérieure et l'Analyse.

et, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur,

$$\frac{dF}{dy}X - \frac{dF}{dx}Y = 0.$$

Ainsi nous aurons à éliminer x et y entre les trois relations

$$xX + yY - 1 = 0, \quad \frac{dF}{dy}X - \frac{dF}{dx}Y = 0, \quad F(x, y) = 0.$$

Soit donc $x = a$, $y = b$ une solution quelconque des deux dernières, le résultat s'obtiendra en égalant à zéro le produit de tous les facteurs $aX + bY + 1$, que je désignerai par P. Cela posé, j'observe que ces quantités a et b contiendront en général X et Y; mais s'il arrive qu'elles en soient indépendantes, nous sommes assurés que le facteur linéaire $aX + bY + 1$ entrera dans P. Or on obtient, en égalant à zéro les coefficients de X et de Y dans la seconde équation,

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0;$$

cette circonstance se présentera donc et se présentera seulement lorsque la courbe $F(x, y) = 0$ aura des points doubles. On voit, de plus, que le déterminant fonctionnel relatif aux équations proposées, savoir

$$\frac{dF}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dy}X - \frac{dF}{dx}Y\right) - \frac{dF}{dy}\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy}X - \frac{dF}{dx}Y\right),$$

s'évanouit si elles sont satisfaites. Par conséquent, tout point double $x = a$, $y = b$ est, pour ces équations, une solution double; le facteur linéaire qui en résulte $aX + bY + 1$ entre donc au carré dans P, et l'on aura $P = \Pi^2\Phi$, Π désignant le produit d'autant de facteurs linéaires qu'il y a de tels points (*). Je ne m'arrêterai pas à faire voir comment, ayant obtenu la quantité P, on peut en déduire les polynômes Π et Φ; je remarquerai seulement que l'ordre de la polaire d'une

(*) *Voir* sur cette question dans l'Ouvrage de M. Salmon, *A treatise on the Higer Plane Curves*, la Section IV, *General theory of multiple points and tangents.*

courbe d'ordre n étant $n(n-1)$, on a, en désignant par d et δ les degrés de Π et Φ, la relation

$$2d + \delta = n(n-1).$$

De là se tire en effet une détermination nouvelle et facile du nombre des points doubles d'une courbe unicursale déjà obtenue p. 249, et qu'à cause de son importance pour notre objet j'indiquerai succinctement. Reprenant le calcul de l'enveloppe des positions de la droite variable $xX + yY + 1 = 0$ dans l'hypothèse où la courbe $F(x, y) = 0$ est unicursale, j'exprime x et y en fonction rationnelle d'un paramètre par les formules

$$x = \frac{U}{W}, \quad y = \frac{V}{W},$$

U, V et W étant des polynômes du $n^{ième}$ degré en θ. L'équation de la droite devient ainsi

$$UX + VY + W = 0,$$

et sa dérivée par rapport à θ donne

$$U'X + V'Y + W' = 0.$$

Or on en tire ces expressions, dont nous ferons usage plus tard,

$$X = \frac{VW' - WV'}{UV' - VU'}, \quad Y = \frac{WU' - UW'}{UV' - VU'};$$

elles montrent que la polaire est elle-même unicursale, et comme les polynômes

$$UV' - VU', \quad VW' - WV', \quad WU' - UW'$$

sont du degré $2(n-1)$, elle est d'ordre $2(n-1)$. Faisant donc $\delta = 2(n-1)$, dans la relation

$$2d + \delta = n(n-1),$$

on en conclut

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

III. Nous savons qu'à l'égard d'une courbe quelconque rapportée à des coordonnées rectangulaires $y=f(x)$ (*fig.* 31), l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ représente le segment PQRS compris entre l'arc PQ, l'axe Ox et les ordonnées PR, QS qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1. Nous avons vu aussi qu'en faisant $x=\varphi(\theta)$, $y=\psi(\theta)$, la même quantité est donnée par l'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta$, sous la condition qu'en faisant croître θ de α à β les expressions de x et y donneront tous les points de l'arc PQ. Je considérerai maintenant, en conservant la même variable auxiliaire, une courbe fermée (*fig.* 32) qui soit décrite en entier, et une seule fois, à partir du point M, dans le sens MNP, θ croissant encore de α à β; supposant en outre qu'elle ne se coupe point, et qu'à une même abscisse correspondent seulement deux ordonnées, je vais établir que l'aire comprise dans l'intérieur de la courbe est représentée par l'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta$, changée de signe.

Fig. 31.

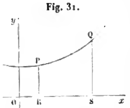
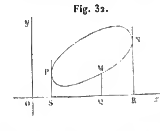


Fig. 32.



Soient N et P les points limites dont les ordonnées NR et PS sont des tangentes; considérons successivement les arcs MN, NP, PM, et supposons que le premier soit décrit en faisant croître θ de α à θ_0, le second de θ_0 à θ_1, et le troisième de θ_1 à β. Les segments MNQR, PNSR, PMSQ sont donnés, comme on vient de le dire, par les intégrales

$$\int_\alpha^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta, \quad \int_{\theta_1}^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta, \quad \int_{\theta_1}^{\beta} \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta,$$

et l'on aura, par conséquent,

$$\text{PMSQ} + \text{MNQR} - \text{PNSR} = \int_{\theta_1}^{\beta} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta$$
$$- \int_{\theta_1}^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta.$$

Or le premier membre de cette égalité est, sauf le signe, l'aire de la courbe; et, si nous intervertissons les limites pour remplacer dans le second l'intégrale

$$-\int_{\theta_1}^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta \quad \text{par} \quad +\int_{\theta_0}^{\theta_1} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta,$$

on pourra l'écrire ainsi :

$$\int_{\alpha}^{\theta_0} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_1}^{\beta} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta,$$

c'est-à-dire simplement

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta,$$

comme nous voulions l'établir.

Considérons maintenant le cas général où les relations $x = \varphi(\theta)$, $y = \psi(\theta)$ donnent, en faisant croître θ de α à β, une courbe pouvant se couper elle-même un nombre quelconque de fois, et qui, en supposant uniformes les fonctions $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$, soit décrite à partir d'un point donné et en revenant à ce même point, d'une manière entièrement déterminée. La signification de l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\theta)\varphi'(\theta)\,d\theta$ est alors l'objet du théorème suivant, dont l'énoncé m'a été communiqué par M. Bonnet, qui l'a tiré de plusieurs passages des *OEuvres* de Gauss.

IV. Soit, pour fixer les idées, la courbe représentée par la *fig.* 33, où l'on voit trois points doubles et quatre aires limi-

tées différentes, désignées par A, B, C, D; l'intégrale définie proposée sera une combinaison linéaire de ces aires partielles multipliées respectivement par des coefficients entiers qui résultent de la loi suivante.

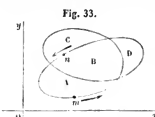


Fig. 33.

Concevons un point mobile décrivant en entier la courbe, et considérons-le dans une position quelconque, par exemple en n, sur une des limites de séparation des deux aires contiguës B et C. Le sens du mouvement étant connu, on donnera à l'aire de droite un coefficient plus élevé d'une unité qu'à l'aire de gauche; si, en outre, on convient d'attribuer le coefficient zéro à l'espace infini qui est en dehors de la courbe, ils se trouveront tous, comme on va voir, déterminés de proche en proche. Effectivement, soit m le point de départ, et supposons l'espace infini à droite de la direction du mouvement, le coefficient de A s'obtient immédiatement et a pour valeur -1; mais ceux des aires B et D qui s'offrent ensuite restent inconnus, et il faut arriver à la portion C contiguë à l'espace extérieur pour obtenir une nouvelle détermination, à savoir -1. Parvenu ensuite sur la limite de séparation de A et B, la loi posée assigne le coefficient -2 à l'aire B, placée à gauche de l'aire A, qui a déjà le facteur -1. Après on trouve le coefficient -1 pour l'aire D, de sorte que la combinaison représentant l'intégrale définie est $-A-2B-C-D$; et si nous continuons de décrire la courbe jusqu'à revenir au point de départ, nous ne ferons qu'obtenir des vérifications des valeurs déjà calculées.

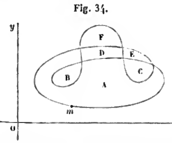


Fig. 34.

Pour donner un second exemple, considérons cette autre courbe (*fig.* 34), où se trouvent six portions limitées A, B, C, D, E, F, et supposons que, à l'origine en m, l'es-

pace infini soit à gauche de la direction assignée au point décrivant. La combinaison résultant de la loi des coefficients des aires est

$$A + 2B + 2C + E - F,$$

et l'on observera que l'aire D n'y figure pas, son coefficient étant égal à zéro. Enfin, et en dernier lieu, je remarquerai cette conséquence relative aux courbes fermées n'ayant pas de points doubles, mais pouvant être coupées par une droite en un nombre de points quelconque, c'est que leur aire est représentée au signe près par l'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi(\theta)\varphi'(\theta)d\theta$, résultat qui, précédemment, n'a été démontré que dans le cas particulier où deux ordonnées seulement correspondent à la même abscisse.

QUADRATURE DES COURBES PLANES.

Courbes du second degré; cycloïde.

I. L'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

l'aire d'un segment compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0, x aura pour expression

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx;$$

mais je remarquerai, avant d'effectuer le calcul, qu'en posant pour un instant

$$A' = \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

il vient

$$A = \frac{b}{a}A'.$$

Or A′ est précisément la valeur de A lorsqu'on suppose $b=a$: c'est donc l'aire du segment de cercle

$$x^2+y^2=a^2$$

circonscrit à l'ellipse et compris entre les ordonnées qui correspondent aux mêmes abscisses x_0 et x. Appliquons maintenant à A′ les méthodes relatives à l'intégration des radicaux du second degré en écrivant

$$A' = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

nous réduirons l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, en partant de l'identité

$$d\left(x\sqrt{a^2-x^2}\right) = \left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

qui donne

$$x\sqrt{a^2-x^2} = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - 2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

et par conséquent

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

On en conclut

$$A' = \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2};$$

or on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a},$$

et, si l'on suppose pour plus de simplicité $x_0=0$, il viendra

$$A' = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2},$$

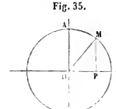
sans ajouter de constante, puisque les deux membres s'évanouissent pour $x=0$.

Le terme algébrique de cette formule,

$$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2},$$

est l'aire du triangle OMP ou $OP = x$, $MP = \sqrt{a^2-x^2}$, et par conséquent le terme transcendant $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ donne l'aire du secteur circulaire AOM (*fig.* 35). La quantité $\arcsin\frac{x}{a}$ provenant de l'intégrale

Fig. 35.



$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

est, comme on l'a vu (p. 303), le plus petit arc ayant $\frac{x}{a}$ pour sinus; elle est donc pour $x = a$ égale à $\frac{\pi}{2}$; par suite le secteur correspondant, c'est-à-dire le quart du cercle, a pour valeur $\frac{1}{4}\pi a^2$.

On parvient d'une autre manière à la quadrature de l'ellipse, en représentant ses coordonnées par les formules

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi,$$

et faisant croître φ de zéro à 2π. L'espace illimité se trouvera ainsi à droite de la direction du point décrivant la courbe; par conséquent l'intégrale $\int y\,dx$ prise par rapport à φ entre les limites zéro et 2π sera l'aire changée de signe. Elle a effectivement la valeur négative $-ab\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$; or l'équation

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{2}$$

donne immédiatement

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi,$$

d'où, pour l'aire de l'ellipse, la formule

$$\pi ab.$$

Soit en second lieu l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

nous aurons

$$A = \frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}A',$$

en appelant encore A′ le segment relatif à l'hyperbole équilatère où $b = a$, savoir

$$A' = \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

Opérant comme tout à l'heure, en écrivant

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

je ferai usage de la relation

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2},$$

ce qui donnera

$$A' = -\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2},$$

et je déterminerai l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ par la formule générale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right).$$

On en conclut immédiatement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right),$$

et si l'on dispose de la constante arbitraire de sorte que l'intégrale soit prise depuis $x = a$, on trouvera

$$\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Il vient donc pour l'aire de l'hyperbole

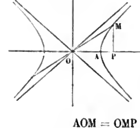
$$A = \frac{b}{a}A' = -\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2} - C.$$

Supposons cette aire comptée à partir du sommet; on devra avoir $A = 0$ pour $x = a$; il en résulte $C = 0$, et par suite

$$\text{AMP} = -\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Ici, comme pour le cercle, la figure donnera la signification de la partie transcendante (*fig.* 36); ayant en effet

Fig. 36.



$$\text{OMP} = \frac{1}{2}xy = \frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2},$$

on obtiendra pour le secteur AOM la valeur

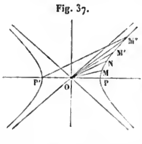
$$\text{AOM} = \text{OMP} - \text{AMP} = \frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Remarquons enfin que, l'équation de l'hyperbole

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

devenant celle de l'ellipse lorsqu'on change b en $\frac{b}{\sqrt{-1}}$ et le radical $\sqrt{x^2-a^2}$ en $\sqrt{-1}\sqrt{a^2-x^2}$, on obtiendra l'aire de l'ellipse en effectuant le même changement dans celle de l'hyperbole. Cette correspondance analytique se retrouve en Géométrie à l'égard du cercle et de l'hyperbole équilatère.

Fig. 37.

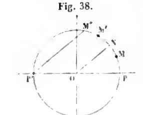


Considérons dans cette dernière courbe rapportée à son centre et à ses axes les secteurs OMP, OM'P (*fig.* 37), et désignons par N le milieu de la corde MM'. Une parallèle à la direction ON, menée par le sommet de gauche P', rencontrera l'hyperbole en un point M'' tel que les deux secteurs OM'M'' et OMP soient égaux en surface, ce qui donnera la relation

$$\text{OM''P} = \text{OMP} + \text{OM'P};$$

or, en faisant la même construction dans le cercle rapporté à son centre, c'est-à-dire en menant par l'extrémité P' du diamètre une parallèle P'M'' à la direction ON perpendiculaire sur le milieu d'une corde quelconque MM' (*fig.* 38), on reconnaît immédiatement l'égalité des arcs MP, M'M'', et par conséquent des secteurs auxquels ils servent de mesure.

Fig. 38.



II. Je donnerai un exemple de l'emploi des coordonnées polaires pour la détermination des quadratures, en considérant les courbes du second degré rapportées à leur centre, et ayant pour équation

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 = 1.$$

Faisant en effet

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{1}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega},$$

on aura à intégrer

$$\frac{1}{2}\int\rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Posons, pour décomposer en éléments simples,

$$A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega = N\sin(\omega - \alpha)\sin(\omega - \beta),$$

on aura les conditions suivantes :

$$A = N\cos\alpha\cos\beta, \quad 2B = -N(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha),$$
$$C = N\sin\alpha\sin\beta,$$

qui donnent aisément

$$4(B^2 - AC) = N^2\sin^2(\alpha - \beta),$$

et nous observerons que $\tang\alpha$ et $\tang\beta$ sont les racines de l'équation du second degré

$$Az^2 + 2Bz + C = 0.$$

Cela posé, on a immédiatement

$$\frac{1}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{1}{N\sin(\alpha-\beta)}[\cot(\omega-\alpha)-\cot(\omega-\beta)],$$

d'où

$$\int\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{1}{N\sin(\alpha-\beta)}\log\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\omega-\beta)}.$$

Considérons en particulier le cas de l'ellipse où $B^2 - AC$ est négatif, de sorte que $\tang\alpha$, $\tang\beta$ et, par conséquent, α et β sont imaginaires conjuguées. Soit donc

$$\alpha = a + b\sqrt{-1}, \quad \beta = a - b\sqrt{-1},$$

b étant supposé positif; nous déterminerons le signe du facteur constant $N\sin(\alpha-\beta)$ en remarquant d'abord que le sinus sera le produit de $\sqrt{-1}$ par une quantité du signe de b, et par conséquent positive, puisque N, d'après la relation

$$A = N\cos\alpha\cos\beta,$$

sera du signe de A et positif. On a donc

$$N\sin(\alpha-\beta) = 2\sqrt{AC-B^2}\sqrt{-1},$$

en prenant la racine carrée en valeur absolue.

L'intégrale définie

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega},$$

qui donne l'aire totale de l'ellipse, peut se réduire aux limites zéro et π, par cette décomposition

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega}$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega}$$

$$+ \int_\pi^{2\pi}\frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega};$$

en posant, en effet,

$$\omega = \omega_1 + \pi,$$

on trouve immédiatement

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega}$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{d\omega_1}{A\sin^2\omega_1 + 2B\sin\omega_1\cos\omega_1 + C\cos^2\omega_1}.$$

L'aire de l'ellipse étant ainsi représentée par la quantité

$$\frac{1}{2\sqrt{AC - B^2}\sqrt{-1}}\left[\int_0^{\pi} \cot(\omega - \alpha)\,d\omega - \int_0^{\pi} \cot(\omega - \beta)\,d\omega\right],$$

nous emploierons la formule établie p. 334

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}\left(x - a - b\sqrt{-1}\right)dx = 2\pi(b)\sqrt{-1};$$

or, en faisant $x = 2\omega$, et remplaçant a et b par $2a$ et $2b$, on en tire

$$\int_0^{\pi} \cot\left(\omega - a - b\sqrt{-1}\right)d\omega = \pi(b)\sqrt{-1},$$

et, par conséquent, puisqu'on suppose b positif,

$$\int_0^{\pi} \cot\left(\omega - a - b\sqrt{-1}\right)d\omega - \int_0^{\pi} \cot\left(\omega - a + b\sqrt{-1}\right)d\omega = 2\pi\sqrt{-1};$$

nous avons, par suite, cette valeur :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}},$$

qui est remarquable en ce qu'elle donne, au moyen d'une intégrale définie, une expression rationnelle en A, B, C du radical $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}$, dont on fait usage dans plusieurs questions importantes d'Analyse.

III. On parvient à un résultat beaucoup plus important en considérant les courbes de second degré rapportées à un de

leurs foyers pour pôle. L'aire du secteur déterminé par deux rayons vecteurs et l'arc de la courbe donne, en effet, d'après la première loi de Képler, l'expression du temps employé à décrire cet arc dans le mouvement d'une planète ou d'une comète autour du Soleil. Pour en faire le calcul dans le cas de l'ellipse, je rappellerai d'abord qu'en partant de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

on a cette valeur du rayon vecteur issu du foyer de droite

$$\rho = a - \frac{cx}{a};$$

de sorte qu'en faisant

$$x = c + \rho\cos\omega$$

on obtient l'équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\omega},$$

et, par suite, l'aire du secteur

$$S = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega'} \frac{b^4 d\omega}{(a+c\cos\omega)^2}.$$

Soit d'abord

$$\cos\omega = x,$$

on sera amené à l'intégrale

$$\int \frac{b^4 d\omega}{(a+cx)^2\sqrt{1-x^2}},$$

et les méthodes qui la concernent conduisent facilement à cette expression

$$\int \frac{b^4 dx}{(a+cx)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{b^2 c\sqrt{1-x^2}}{a+cx} - b \operatorname{arc tang} \frac{b\sqrt{1-x^2}}{c+ax}.$$

Mais on aura un calcul plus simple en substituant à la variable ω l'angle φ (*), qui donne pour x et y ces valeurs

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi.$$

(*) C'est l'anomalie excentrique.

Ayant en effet

$$\rho = a - \frac{cx}{a} = a - c\cos\varphi,$$

nous en conclurons la relation

$$\frac{b^2}{a + c\cos\omega} = a - c\cos\varphi,$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{a\cos\varphi - c}{a - c\cos\varphi},$$

$$\sin\omega = \frac{b\sin\varphi}{a - c\cos\varphi},$$

et par conséquent

$$d\omega = \frac{b\,d\varphi}{a - c\cos\varphi}.$$

Si l'on désigne par φ et φ' les valeurs qui correspondent aux angles ω et ω', on aura ainsi

$$S = \frac{1}{2}ab\int_{\varphi}^{\varphi'}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)d\varphi.$$

Cette intégrale, qui s'obtient immédiatement, donne lieu à une remarque utile pour l'Astronomie, c'est qu'en changeant les limites elle peut se ramener au cas particulier de $\frac{c}{a} = 1$, c'est-à-dire de $b = 0$. Soit, en effet,

$$\int_{\varphi}^{\varphi'}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)d\varphi = \int_{\theta}^{\theta'}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\varphi' - \varphi - \frac{c}{a}(\sin\varphi' - \sin\varphi) = \theta' - \theta - (\sin\theta' - \sin\theta);$$

il suffira de poser les deux égalités

$$\varphi' - \varphi = \theta' - \theta,$$

$$\frac{c}{a}(\sin\varphi' - \sin\varphi) = \sin\theta' - \sin\theta.$$

Or, en écrivant la seconde sous la forme

$$\frac{c}{a}\sin\frac{\varphi' - \varphi}{2}\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2} = \sin\frac{\theta' - \theta}{2}\cos\frac{\theta' + \theta}{2},$$

elle se réduit, d'après la première, à

$$\frac{c}{a}\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}=\cos\frac{\theta'+\theta}{2}.$$

Nous allons maintenant en tirer les expressions des inconnues θ et θ' sous la forme remarquable qui a été découverte par Lambert, et dont il est fait usage dans la Mécanique céleste.

Considérons la corde du secteur, que j'appellerai δ; les coordonnées rectangulaires des extrémités de l'arc étant $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, et $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$, on aura

$$\delta^2=a^2(\cos\varphi'-\cos\varphi)^2+b^2(\sin\varphi'-\sin\varphi)$$

et, en transformant en produits les différences de sinus et de cosinus,

$$\begin{aligned}\delta^2&=4\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}\left[a^2\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}+b^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right]\\&=4\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}\left[a^2-c^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right],\end{aligned}$$

ce qui s'exprime immédiatement à l'aide de θ et θ', et donne

$$\delta^2=4a^2\sin^2\frac{\theta'-\theta}{2}\sin^2\frac{\theta'+\theta}{2};$$

d'où, en supposant $\theta'>\theta$,

$$\delta=2a\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\sin\frac{\theta'+\theta}{2}.$$

Introduisons encore les deux rayons vecteurs ρ et ρ' qui correspondent aux angles φ et φ', savoir

$$\begin{aligned}\rho&=a-c\cos\varphi,\\\rho'&=a-c\cos\varphi'.\end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités, il viendra

$$\begin{aligned}\rho+\rho'&=2a-c(\cos\varphi+\cos\varphi')=2a-2c\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\\&=2a-2a\cos\frac{\theta'+\theta}{2}\cos\frac{\theta'-\theta}{2},\end{aligned}$$

et nous aurons, par conséquent,

$$2a - \rho - \rho' = 2a \cos\frac{\theta' + \theta}{2}\cos\frac{\theta' - \theta}{2}.$$

Or cette relation, jointe à la précédente,

$$\delta = 2a \sin\frac{\theta' + \theta}{2}\sin\frac{\theta' - \theta}{2},$$

donne en ajoutant et retranchant membre à membre,

$$\cos\theta = \frac{2a - \rho - \rho' + \delta}{2a},$$

$$\cos\theta' = \frac{2a - \rho - \rho' - \delta}{2a},$$

ou encore

$$\sin^2\frac{1}{2}\theta = \frac{\rho + \rho' - \delta}{2a},$$

$$\sin^2\frac{1}{2}\theta' = \frac{\rho + \rho' + \delta}{2a},$$

Ces valeurs, que nous venons d'établir d'après Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II, Note V) conduisent à la proposition célèbre et importante de la Mécanique céleste connue sous le nom de *théorème de Lambert*.

IV. Considérons maintenant la cycloïde définie par les deux équations

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = a(1 - \cos\varphi);$$

l'aire exprimée par l'angle φ sera

$$\int y dx = a^2 \int (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi,$$

ce qui s'intégrera en observant que

$$(1 - \cos\varphi)^2 = 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi = 1 - 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$
$$= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Il résulte, en effet,

$$\int(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + C,$$

et l'on obtient, pour la portion du cycloïde comprise entre deux points consécutifs de rencontre avec l'axe des abscisses, et déterminée par conséquent par la valeur de φ croissant de zéro à 2π, cette expression

$$a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 3\pi a^2,$$

c'est-à-dire, comme Galilée l'a découvert le premier, trois fois l'aire du cercle générateur.

En rapportant la cycloïde à son sommet, ce qui se fait en changeant y en $2a-y$, on aurait eu un calcul plus simple, car les équations devenant

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = a(1+\cos\varphi),$$

on obtient ainsi immédiatement

$$\int y\,dx = a^2\int \sin^2\varphi\, d\varphi = a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right).$$

Courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre.

I. Si l'on rapporte à son point double, pris pour origine des coordonnées, l'équation d'une courbe unicursale du troisième ordre, elle prend la forme caractéristique suivante :

$$ax^2 + a'xy + a''y^2 = bx^3 + b'x^2y + b''xy^2 + b'''y^3,$$

et les droites $y = \theta x$ ne la rencontreront qu'en un point d'intersection variable dont les coordonnées, fonctions rationnelles de θ, seront

$$x = \frac{a + a'\theta + a''\theta^2}{b + b'\theta + b''\theta^2 + b'''\theta^3}, \quad y = \frac{a\theta + a'\theta^2 + a''\theta^3}{b + b'\theta + b''\theta^2 + b'''\theta^3}.$$

Ayant ainsi les formules de substitution qui ramènent l'intégrale $\int y\,dx$ à celle d'une simple fonction rationnelle, nous nous proposons de déterminer dans quel cas la courbe est quarrable algébriquement. J'emploierai dans ce but l'identité

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}\int (y\,dx - x\,dy),$$

afin de mettre à profit cette circonstance, que l'intégrale $\int (y\,dx - x\,dy)$ donne, si l'on fait

$$X = \lambda x + \lambda' y, \quad Y = \mu x + \mu' y,$$

la relation

$$(\mu\lambda' - \mu'\lambda)\int (y\,dx - x\,dy) = \int (Y\,dX - X\,dY).$$

Cela posé, soit, en décomposant en fractions simples,

$$x = \frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma},$$

$$y = \frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma},$$

on aura

$$X = \frac{A\lambda + A'\lambda'}{\theta - \alpha} + \frac{B\lambda + B'\lambda'}{\theta - \beta} + \frac{C\lambda + C'\lambda'}{\theta - \gamma},$$

$$Y = \frac{A\mu + B'\mu'}{\theta - \alpha} + \frac{B\mu + B'\mu'}{\theta - \beta} + \frac{C\mu + C'\mu'}{\theta - \gamma},$$

et nous disposerons de λ, λ', μ, μ' par les conditions

$$B\lambda + B'\lambda' = 0, \quad C\mu + C'\mu' = 0,$$

de manière à obtenir ces nouvelles expressions

$$X = \frac{P}{\theta - \alpha} + \frac{Q}{\theta - \gamma}, \quad Y = \frac{R}{\theta - \alpha} + \frac{S}{\theta - \beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{Y\,dX - X\,dY}{d\theta} = \left[\frac{P}{\theta - \alpha} + \frac{Q}{\theta - \gamma}\right]\left[\frac{R}{(\theta - \alpha)^2} + \frac{S}{(\theta - \beta)^2}\right]$$
$$- \left[\frac{R}{\theta - \alpha} + \frac{S}{\theta - \beta}\right]\left[\frac{P}{(\theta - \alpha)^2} + \frac{Q}{(\theta - \gamma)^2}\right].$$

Soient maintenant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les résidus du second membre correspondant aux valeurs α, β, γ de la variable; les conditions pour que les logarithmes disparaissent dans l'expression de l'intégrale seront $\mathcal{A}=0$, $\mathcal{B}=0$, $\mathcal{C}=0$; mais l'une d'elles rentre dans les deux autres; car, d'après une remarque faite (p. 264), on a : $\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}=0$. Nous pourrons donc nous borner aux deux dernières; or on trouve aisément

$$\mathcal{B} = -2S\left[\frac{P}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{Q}{(\beta-\gamma)^2}\right],$$
$$\mathcal{C} = +2Q\left[\frac{R}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{S}{(\gamma-\beta)^2}\right],$$

d'où ces égalités

$$\frac{P}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{Q}{(\beta-\gamma)^2}=0, \quad \frac{R}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{S}{(\gamma-\beta)^2}=0,$$

et, par suite,

$$P=m(\beta-\alpha)^2, \quad Q=-m(\beta-\gamma)^2,$$
$$R=n(\gamma-\alpha)^2, \quad S=-n(\gamma-\beta)^2.$$

Il en résulte, en faisant abstraction, pour simplifier, des facteurs m et n, ces expressions

$$X=\frac{(\beta-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{\theta-\gamma},$$
$$Y=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta},$$

dont l'une se déduit de l'autre par la simple permutation de β et γ, et l'on en conclut facilement

$$\int Y\,dX=\frac{1}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^2}-\frac{(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)}{\theta-\gamma},$$
$$\int X\,dY=\frac{1}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^2}-\frac{(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)}{\theta-\beta},$$

d'où, par suite,

$$\int(Y\,dX-X\,dY)=(\beta-\gamma)^2\left(\frac{\gamma-\alpha}{\theta-\beta}-\frac{\beta-\alpha}{\theta-\gamma}\right)$$
$$=(\beta-\gamma)^2\frac{\beta+\gamma-\alpha-\theta}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)}.$$

II. Nous appliquerons ce résultat à un exemple particulier en considérant la courbe connue sous le nom de *folium de Descartes*, et qui a pour équation

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

L'origine est donc un point double, et les coordonnées s'expriment par les formules

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3 + 1}, \quad y = \frac{3\theta^2}{\theta^3 + 1},$$

qui permettent de reconnaître aisément la forme de la courbe. On remarque d'abord que pour $\theta = -1$, x et y deviennent infinis, et de là résulte une asymptote rectiligne qui s'obtient comme il suit. Supposons qu'en général, dans les équations

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta),$$

les deux fonctions deviennent infinies pour $\theta = \alpha$, et qu'en posant

$$\theta = \alpha + h$$

les développements suivant les puissances croissantes de h soient de cette forme

$$x = \frac{a}{h} + a' + a''h + \dots, \quad y = \frac{b}{h} + b' + b''h + \dots.$$

Il est clair qu'en faisant tendre h vers zéro les coordonnées de la courbe ont pour limites les expressions

$$x = \frac{a}{h} + a', \quad y = \frac{b}{h} + b',$$

qui représentent une droite, à savoir

$$a(y - b') - b(x - a') = 0.$$

Dans le cas particulier que nous avons en vue, on aura ainsi pour $\theta = -1 + h$,

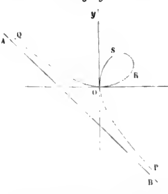
$$x = -\frac{1}{h} - 1, \quad y = \frac{1}{h} - 2,$$

ce qui donne l'asymptote

$$x + y + 1 = 0.$$

Ayant tracé deux axes rectangulaires Ox, Oy et construit cette droite AB (*fig.* 39), nous aurons d'abord, en faisant croître θ de $-\infty$ à -1, une branche infinie OP, partant de l'origine à laquelle elle est asymptote. On obtiendra ensuite une seconde branche QO partant de l'infini, ayant la même asymptote, et aboutissant encore à l'origine en faisant croître θ de -1 à zéro. Enfin l'ensemble des valeurs comprises de zéro à $+\infty$ donne la boucle ORS, les axes coordonnés étant les deux tangentes en O au point double.

Fig. 39.



Soit maintenant α une racine cubique imaginaire de l'unité, nous aurons, pour la décomposition en fractions simples,

$$x = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2},$$

$$y = +\frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}.$$

Or on tire de là

$$(\alpha - \alpha^2)(x + \alpha^2 y) = \frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2},$$

$$(\alpha^2 - \alpha)(x + \alpha y) = \frac{(1-\alpha^2)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha},$$

et ces formules rentrent dans celles que nous avons trouvées pour les courbes dont l'aire est simplement algébrique.

En effet l'intégrale

$$\int y\,dx = 9\int \frac{\theta^2(1-2\theta^3)\,d\theta}{(\theta^3+1)^3}$$

se détermine sans logarithmes, car en faisant

$$\theta^3 + 1 = t,$$

elle devient

$$\int \frac{(9-6t)\,dt}{t^3} = -\frac{9}{2t^2} + \frac{6}{t}.$$



Nous en déduirons maintenant l'aire de la portion fermée, observant qu'elle est décrite si l'on fait croître θ de zéro à l'infini, l'espace extérieur étant à droite de la direction du mouvement. Cette aire, d'après la règle de Gauss, est donc l'intégrale

$$9\int_0^{\infty} \frac{\theta^2(1-2\theta^3)\,d\theta}{(\theta^3+1)^3} = \int_1^{\infty} \frac{(9-6t)\,dt}{t^3} = -\frac{3}{2},$$

changée de signe; elle est par conséquent égale à $\frac{3}{2}$.

III. L'équation des courbes unicursales du quatrième ordre s'obtient comme il suit. Faisons passer par trois points fixes P, Q, R une courbe du second ordre, dont l'équation, contenant deux coefficients arbitraires λ, μ, sera de la forme

$$u + \lambda v + \mu w = 0,$$

et considérons une fonction homogène du second degré de ces trois polynômes u, v, w, qui sont entièrement déterminés en x et y. Si, en la désignant par $F(u, v, w)$, on pose pour un moment

$$f(x, y) = F(u, v, w),$$

on aura

$$\frac{df}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dy}.$$

Or ces dérivées partielles s'annulent comme $f(x, y)$ pour les trois systèmes de valeurs de x et y qui donnent simultanément $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; par conséquent l'équation $f(x, y) = 0$ représente une courbe du quatrième ordre ayant les trois points doubles P, Q, R. J'ajoute qu'elle les représente toutes, car le polynôme $F(u, v, w)$ renferme cinq coefficients arbitraires, les trois points doubles comptent pour neuf conditions, et l'on a bien le nombre total, égal à quatorze, des conditions qui déterminent en général une courbe du quatrième ordre. Cette équation obtenue, voici maintenant comment on en tire les expressions des coordonnées en fonction

rationnelle d'une variable. Mettons $F(u, v, w)$ sous la forme suivante :

$$F(u, v, w) = (v + mw)(v + nw) + (au + bv + cw)u,$$

a, b, c, m, n désignant des constantes; je dis que des huit points d'intersection de la courbe du quatrième ordre avec celle-ci,

$$u = (v + mw)\theta,$$

qui est du second ordre, un seul est variable avec le paramètre indéterminé θ. En effet, les deux relations sont vérifiées en posant

$$u = 0, \quad v + mw = 0;$$

or, des quatre solutions de ces équations, trois donnent les points doubles, et, comme nous l'avons établi, p. 248, doivent être comptées comme six solutions à l'égard des équations proposées. Nous avons donc bien sept solutions indépendantes de θ; maintenant on obtiendra comme il suit les valeurs de x et y donnant la huitième solution qui dépend seule de ce paramètre.

IV. En premier lieu, je tire des deux égalités

$$(v + mw)(v + nw) + (au + bv + cw)u = 0,$$
$$u = (v + mw)\theta,$$

celle-ci, qui est linéaire en u, v, w,

$$v + nw + (au + bv + cw)\theta = 0.$$

Éliminant ensuite tour à tour u et v, si nous posons, pour abréger,

$$A = (mb - c)\theta^2 + (m - n)\theta,$$
$$B = -ma\theta^2 - c\theta - n,$$
$$C = a\theta^2 + b\theta + 1,$$

nous obtiendrons les suivantes :

$$wB - vC = 0, \quad wA - uC = 0;$$

mais j'observe qu'on peut faire, en désignant par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ trois fonctions linéaires

$$u = \mathfrak{Q}\mathfrak{R}, \quad v = \mathfrak{R}\mathfrak{P}, \quad w = \mathfrak{P}\mathfrak{Q},$$

les droites

$$\mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{Q} = 0, \quad \mathfrak{R} = 0$$

représentant les côtés du triangle PQR ; par conséquent, nous sommes amenés aux équations du premier degré,

$$\mathfrak{Q}\,B - \mathfrak{R}C = 0, \quad \mathfrak{P}A - \mathfrak{R}C = 0,$$

ou encore, en introduisant un facteur indéterminé λ à ces trois relations,

$$\mathfrak{P} = \frac{\lambda}{A}, \quad \mathfrak{Q} = \frac{\lambda}{B}, \quad \mathfrak{R} = \frac{\lambda}{C}.$$

Soient maintenant $x = p$, $y = p'$ les coordonnées du point double P, $x = q$, $y = q'$ celles de Q, et $x = r$, $y = r'$ celles de R, elles prendront la forme suivante :

$$\mathfrak{P} = y(r-q) - x(r'-q') + qr' - rq' = \frac{\lambda}{A},$$

$$\mathfrak{Q} = y(p-r) - x(p'-r') + rp' - pr' = \frac{\lambda}{B},$$

$$\mathfrak{R} = y(q-p) - x(q'-p') + pq' - qp' = \frac{\lambda}{C}.$$

Or, en les ajoutant membre à membre, et posant pour un moment

$$\Delta = p(q'-r') + q(r'-p') + r(p'-q'),$$

nous en déduirons

$$\Delta = \lambda\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right);$$

multiplions ensuite la première par p, la seconde par q, la troisième par r, et ajoutons encore, il viendra

$$\Delta x = \lambda\left(\frac{p}{A} + \frac{q}{B} + \frac{r}{C}\right);$$

enfin, en opérant d'une manière analogue avec p', q', r', nous

obtiendrons

$$\Delta y = \lambda\left(\frac{p'}{A} + \frac{q'}{B} + \frac{r'}{C}\right),$$

et ces résultats donnent facilement

$$x = \frac{p\,BC + q\,CA + r\,AB}{BC + CA + AB},$$

$$y = \frac{p'BC + q'CA + r'AB}{BC + CA + AB};$$

ce sont les formules auxquelles nous nous sommes proposés de parvenir, et qui ramènent l'intégrale $\int y\,dx$ à celle des fonctions rationnelles; voici une remarque à laquelle elles donnent lieu.

Je dis qu'il est facile de reconnaître par leur composition analytique que les quantités $x = p$, $y = p'$, par exemple, sont les coordonnées d'un point double. On a effectivement

$$x - p = A\,\frac{(q - p)C + (r - p)B}{BC + CA + AB},$$

$$y - p' = A\,\frac{(q' - p')C + (r' - p')B}{BC + CA + AB};$$

par conséquent les deux valeurs de θ qui sont racines de l'équation du second degré $A = 0$ donnent $x = p$ et $y = p'$, l'une d'elles devant être considérée comme infinie lorsque A se réduit au premier degré. Nous observerons que si elles sont égales, A étant un carré parfait, le point double devient un point de rebroussement; il en résulte qu'en faisant

$$U = p\,\mathcal{B}^2\mathcal{C}^2 + q\,\mathcal{C}^2\mathcal{A}^2 + r\,\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2,$$

$$V = p'\mathcal{B}^2\mathcal{C}^2 + q'\mathcal{C}^2\mathcal{A}^2 + r'\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2,$$

$$W = \mathcal{B}^2\mathcal{C}^2 + \mathcal{C}^2\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2,$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont du premier degré en θ, nous aurons les courbes du quatrième ordre à trois points de rebroussement, qui sont représentées par les relations

$$x = \frac{U}{W}, \quad y = \frac{V}{W}.$$

Or il est aisé de voir que les expressions

$$UV' - VU', \quad VW' - WV', \quad WU' - UW'$$

auront le produit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ en facteur commun, de sorte que les coordonnées de la polaire obtenues précédemment (p. 385) se réduiront par la suppression de ce facteur à celles d'une courbe du troisième ordre. La réciproque de cette propriété a également lieu, car une courbe unicursale du troisième ordre possédant trois points d'inflexion, il en résulte autant de points de rebroussement dans sa polaire qui est de quatrième ordre (*).

RECTIFICATION DES COURBES.

Parabole et ellipse.

On a obtenu pour la longueur d'un arc de courbe plane, rapportée à des coordonnées rectangulaires, la formule

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

où les limites x_0 et x désignent les abscisses des extrémités de l'arc. C'est à la parabole $y^2 = 2px$ que nous en ferons la

---

(*) Si l'on considère en particulier les équations

$$x = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi, \quad y = \sin 2\varphi - 2\sin\varphi,$$

qui représentent le lieu engendré par un point d'une circonférence de rayon égal à l'unité, roulant à l'intérieur d'une autre circonférence de rayon triple, on aura pour les coordonnées de la polaire réciproque

$$X = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{3}{2}\varphi}, \quad Y = \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{3}{2}\varphi},$$

d'où cette équation du troisième ordre

$$Y = X\sqrt{\frac{X-1}{3X+1}},$$

dont la polaire est, par conséquent, la courbe proposée, ou l'hypocycloïde à trois points de rebroussement. (*Voyez* sur cette courbe le Mémoire de M. Cremona, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 101, et une Note de M. Clebsch, p. 124.)

première application, et comme on a rationnellement

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad dx = \frac{y\,dy}{p},$$

nous prendrons y pour variable indépendante en écrivant

$$s = \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p}\int_{y_0}^{y} \sqrt{y^2 + p^2}\,dy.$$

Or on peut immédiatement conclure cette intégrale de celle qui exprime l'aire de l'hyperbole, savoir

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \text{const.}$$

En faisant $a^2 = -p^2$, et en écrivant y au lieu de x, il vient ainsi

$$\int \sqrt{y^2 + p^2}\,dy = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2} + \frac{1}{2}p^2\log\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) + \text{const.}$$

Si l'arc est compté à partir du sommet, on déterminera la constante de manière que le premier membre s'annule pour $y = 0$, et l'on trouvera

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{1}{2}p\log\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p},$$

le terme algébrique, dans cette expression, représentant la portion de la tangente à l'extrémité de l'arc comprise entre le point de contact et l'axe des y.

Comme exercice de calcul, j'indiquerai encore le procédé suivant pour y parvenir.

Soit

$$y = \frac{pz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

d'où

$$dy = \frac{p\,dz}{(1 - z^2)\sqrt{1 - z^2}};$$

on aura

$$S = \frac{1}{p}\int \sqrt{y^2 + p^2}\,dy = p\int \frac{dz}{(1 - z^2)^2};$$

maintenant la relation

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right].$$

donne

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right] + \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z}$$
$$= \frac{1}{2(1-z^2)} + \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z},$$

et, en remplaçant z par sa valeur en y,

$$z = \frac{y}{\sqrt{y^2+p^2}},$$

on retrouvera bien le résultat précédemment obtenu, si l'on remarque, à l'égard du terme logarithmique, que

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{\sqrt{y^2+p^2}+y}{\sqrt{y^2+p^2}-y} = \frac{\left(\sqrt{y^2+p^2}+y\right)^2}{p^2}.$$

Comme seconde application de la formule de rectification, nous allons considérer l'équation de l'ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

et, par conséquent,

$$s = \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx.$$

Si l'on pose, suivant l'usage,

$$a^2-b^2 = a^2e^2,$$

on aura plus simplement

$$s = \int\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{a^2-e^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-e^2x^2)}}\,dx,$$

et nous nous trouvons ainsi amenés, par la voie de la Géométrie, à la considération d'une intégrale où figure la racine car-

rée d'un polynôme du quatrième degré. C'est cette origine que rappelle la dénomination de fonctions elliptiques donnée par Legendre aux intégrales de cette catégorie d'irrationnelles algébriques. A leur égard, nous savons déjà qu'on peut, en changeant de variable, abaisser d'une unité le degré supposé pair du polynôme placé sous le radical. Ainsi, en posant

$$\frac{a-x}{a+x} = t,$$

d'où

$$x = a\frac{1+t}{1-t},$$

on trouve

$$\int\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = a\int\frac{1-e^2-2(1+e^2)t+(1-e^2)t^2}{(1-t)^2\sqrt{F(t)}}\,dt,$$

si, pour abréger, on fait

$$F(t) = -(1-e^2)t + 2(1+e^2)t^2 - (1-e^2)t^3.$$

Les réductions indiquées (p. 293) donnent ensuite

$$\int\frac{1-e^2-2(1+e^2)t+(1-e^2)t^2}{(1-t)^2\sqrt{F(t)}}\,dt = \frac{\sqrt{F(t)}}{1-t} - \frac{1}{2}(1-e^2)\int\frac{1-t}{\sqrt{F(t)}}\,dt,$$

par où l'on voit que l'arc d'ellipse dépend des intégrales de première et de seconde espèce,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{F(t)}},\quad \int\frac{t\,dt}{\sqrt{F(t)}}.$$

Une autre substitution, à savoir $x^2 = t$, conduit plus facilement encore à cette conclusion, car nous en tirons

$$\int\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{a^2-e^2t}{a^2-t}}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{a^2\,dt}{\sqrt{t(a^2-t)(a^2-e^2t)}} - \frac{1}{2}\int\frac{e^2t\,dt}{\sqrt{t(a^2-t)(a^2-e^2t)}}.$$

J'indique ces résultats afin d'avertir que c'est l'intégrale de première espèce, et non l'arc d'ellipse qui est analogue à l'arc

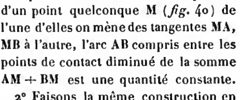
de cercle

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Les arcs de sections coniques représentent en effet un tout autre genre de grandeur; ainsi on ne peut ni les ajouter, ni les multiplier par des constructions où l'on emploierait des courbes algébriques de degré quelconque. Ce qu'il y a d'entièrement nouveau et de caractéristique dans leur nature résulte des belles et importantes proportions de Géométrie que voici :

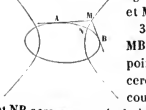
1° Considérant deux ellipses décrites des mêmes foyers, si d'un point quelconque M (*fig.* 40) de l'une d'elles on mène des tangentes MA, MB à l'autre, l'arc AB compris entre les points de contact diminué de la somme AM + BM est une quantité constante.

Fig. 40.



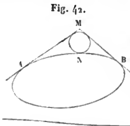
2° Faisons la même construction en supposant le point M (*fig.* 41) sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, qui la rencontre en N; alors la différence des arcs NA et NB sera égale à la différence des tangentes MA et MB.

Fig. 41.



3° Soit enfin deux tangentes MA et MB (*fig.* 42) menées à l'ellipse par un point quelconque; si l'on construit un cercle tangent aux deux droites et à la courbe en N, la différence des arcs NA et NB sera encore égale à MA — MB.

Fig. 42.



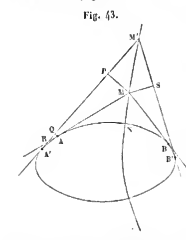
Le premier de ces théorèmes a été découvert par un géomètre anglais, M. Graves, qui l'a étendu aux coniques sphériques; les suivants sont dus à M. Chasles (*), ainsi que plusieurs autres propositions du plus grand intérêt sur les polygones inscrits et cir-

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1844. — Voyez aussi

conscrits à deux coniques homofocales. Voici la démonstration du second théorème, d'après l'illustre géomètre.

Considérons sur l'ellipse deux tangentes infiniment voisines en A et A' (*fig.* 43); soient M et M' les points où elles coupent l'hyperbole, et R leurs points de rencontre. Nous observons qu'en projetant sur A'M' les points M et A en P et Q, on a, aux infiniment petits près du second ordre : RQ = RA et QP = AM. La première relation montre d'abord que la corde de l'arc AA', et par conséquent cet arc lui-même, est encore égal aux infiniment petits près du second ordre à A'R + RQ = A'Q.

Fig. 43.



Cela posé, j'envisage comme fonctions d'une même variable l'arc d'ellipse NA = s et le segment de tangente AM = t, de sorte qu'en la faisant croître de sa différentielle on passe du point A au point A', ce qui donnera

$$NA' = s + ds, \quad A'M' = t + dt.$$

Or, ayant

$$A'M' = A'Q + QP + PM',$$

on conclura de notre seconde relation, QP = AM = t, celle-ci, à savoir :

$$dt = ds + PM'.$$

Soient maintenant MB et M'B' les autres tangentes menées par les points M et M' à l'ellipse; si, en désignant par B et B' les points de contact et par S la projection du point M sur

le *Traité des sections coniques* de M. Salmon, 2[e] édition, p. 297, et dans le *Journal de Crelle*, t. 67, p. 40, le Mémoire de M. Küpper, « Considérations géométriques destinées à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques. »

M′B′, on fait

$$NB = s_1, \quad BM = t_1;$$

nous aurons de même

$$dt_1 = ds_1 + SM'.$$

Mais, d'après la propriété de l'hyperbole homofocale, les angles de la tangente MM′ avec les tangentes à l'ellipse M′A′ et M′B′ sont égaux; il en résulte que PM′ = SM′ et, par suite,

$$dt - dt_1 = ds - ds_1.$$

On en conclut

$$t - t_1 = s - s_1 + \text{const.};$$

et j'ajoute que la constante est nulle, car les deux arcs et les deux segments de la tangente s'évanouissent en même temps quand on fait coïncider les points M et N.

Des courbes algébriques dont l'arc s'exprime par la fonction elliptique de première espèce.

I. L'idée si naturelle de considérer dans d'autres courbes que le cercle les coordonnées d'un point variable comme des fonctions de l'arc compté depuis une origine fixe jusqu'à ce point ne donne aucunement, lorsqu'on envisage l'ellipse, des quantités analogues aux lignes trigonométriques. Les fonctions périodiques ainsi définies, qui au premier abord semblent uniformes, sont en réalité des racines d'équations transcendantes, admettant pour chaque valeur de la variable une infinité de déterminations imaginaires dont il n'est pas possible de séparer la détermination réelle que représente la Géométrie. C'est dans le quatrième ordre seulement qu'on rencontre une courbe dont les coordonnées sont des fonctions uniformes de l'arc, pouvant servir à une définition semblable à celle des fonctions circulaires pour les transcendantes plus élevées, qui sont l'objet de la théorie des fonctions elliptiques. Cette courbe est la lemniscate, et, en effet, par des constructions géométriques, on obtient un arc égal à la somme ou à la

différence des deux arcs donnés; le périmètre total peut être dans les mêmes cas que la circonférence du cercle, divisé en parties d'égale longueur, en n'employant que la règle et le compas. Elle a pour équation

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

et appartient à la catégorie des courbes unicursales, les coordonnées, comme on l'a vu page 244, s'exprimant ainsi :

$$x = \frac{\theta + \theta^3}{1+\theta^4}, \quad y = \frac{\theta - \theta^3}{1+\theta^4}.$$

Deux des points doubles sont à l'infini, le troisième étant l'origine; elle se déduit de l'équation générale précédemment donnée des courbes unicursales du quatrième ordre, en supposant que, des facteurs linéaires qui entrent dans les quantités u, v, w, l'un se réduit à une constante et correspond à une droite éloignée à l'infini, les autres étant les expressions imaginaires conjuguées

$$x + y\sqrt{-1}, \quad x - y\sqrt{-1}.$$

Nous aurons ainsi

$$u = (x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}) = x^2+y^2,$$

$$v = x + y\sqrt{-1}, \quad w = x - y\sqrt{-1},$$

et la relation homogène

$$u^2 = \frac{1}{2}(v^2+w^2)$$

reproduit, en effet, l'équation précédente. Maintenant on tire des expressions rationnelles de x et y les valeurs

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1+3\theta^2-3\theta^4-\theta^6}{(1+\theta^4)^2}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{1-3\theta^2-3\theta^4+\theta^6}{(1+\theta^4)^2},$$

d'où résulte

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{1+\theta^4},$$

et, par conséquent,

$$s = \int \frac{\sqrt{2}\,d\theta}{\sqrt{1+\theta^4}}.$$

C'est cette relation qui donne inversement pour θ une fonction de s, uniforme, périodique et réalisant d'une manière complète l'analogie avec les lignes trigonométriques qu'on n'avait pu obtenir en partant de l'ellipse. Mais la lemniscate n'est point la seule courbe dont l'arc s'exprime ainsi par l'intégrale elliptique de première espèce; M. Serret en a découvert une infinité d'autres algébriques et même unicursales; voici succinctement ses résultats (*).

II. Soit n une constante supérieure à l'unité, de sorte que le trinôme $t^2 - 2nt + 1$ ait ses racines réelles et que le radical $R = \sqrt{-t^2 + 2nt - 1}$ soit aussi une quantité réelle, t ayant une valeur comprise entre ces racines. Cela étant, je pose

$$U = \frac{t - 1 + \sqrt{-1}\,R}{\sqrt{2(n-1)t}}, \quad V = \frac{t + 1 - \sqrt{-1}\,R}{\sqrt{2(n+1)t}};$$

ces expressions imaginaires auront pour module l'unité, et l'on vérifie aisément que

$$\frac{d \log U}{dt} = -\sqrt{-1}\,\frac{t+1}{2tR}, \quad \frac{d \log V}{dt} = \sqrt{-1}\,\frac{t-1}{2tR}.$$

Déterminant donc x et y en fonction de t, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans la relation

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{t}\, U^{\frac{n-1}{2}} V^{\frac{n+1}{2}},$$

on aura

$$\frac{d \log(x + y\sqrt{-1})}{dt} = \frac{1}{2t} + \frac{n-1}{2}\,\frac{d \log U}{dt} + \frac{n+1}{2}\,\frac{d \log V}{dt}$$
$$= \frac{R + \sqrt{-1}(t-n)}{2tR},$$

(*) *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 268, et plusieurs Mémoires dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. X.

et, par suite,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})\,\frac{R + \sqrt{-1}\,(t - n)}{2tR}.$$

Or les modules de U et V étant l'unité, on en conclut

$$x^2 + y^2 = t,$$

d'où

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (x^2 + y^2)\,\frac{R^2 + (t - n)^2}{4t^2R^2} = \frac{n^2 - 1}{4tR^2},$$

et, par conséquent,

$$s = \int \frac{(n^2 - 1)\,dt}{4\sqrt{t(-t^2 + 2nt - 1)}}.$$

L'arc est donc exprimé par une intégrale elliptique de première espèce, et l'expression de $x + y\sqrt{-1}$ montre que l'équation de la courbe sera algébrique, lorsque la constante n sera un nombre commensurable. Dans le cas de n entier et impair, les coordonnées ne renfermeront même d'autre irrationnelle, par rapport à t, que le radical $R = \sqrt{-t^2 + 2nt - 1}$ qu'on pourra transformer, par une substitution, en une fonction rationnelle d'une autre variable, de sorte que la courbe sera unicursale.

Soit, par exemple, $n = 3$, ce qui donnera

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{t}\,\frac{t - 1 + \sqrt{-1}\,R}{2\sqrt{t}}\left(\frac{t + 1 - \sqrt{-1}\,R}{2\sqrt{2t}}\right)^2,$$

nous en conclurons

$$x = \frac{t^2 + 4t - 1}{4t}, \quad y = R\,\frac{1 - t}{4t},$$

en supposant $R = \sqrt{-t^2 + 6t - 1}$, et ces relations représentent précisément la lemniscate.

Écrivons, en effet, l'équation entre x et t de cette manière :

$$t(t - 4x + 4) = 1,$$

et remplaçons t par $x^2 + y^2$, elle devient

$$(x^2 + y^2)\,[(x - 2)^2 + y^2] = 1,$$

ce qui met en évidence l'une des propriétés caractéristiques de la lemniscate; il suffit d'y changer x en $x+1$, pour l'obtenir sous la forme ordinaire

$$(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2).$$

Je rattacherai aux courbes de M. Serret celles d'Euler, dont les arcs s'expriment par des arcs de cercles (*), et qui en sont de simples transformées qu'on obtient en posant

$$X = x^2-y^2, \quad Y = 2xy,$$

ou bien

$$X + Y\sqrt{-1} = (x+y\sqrt{-1})^2.$$

Ayant, en effet,

$$x+y\sqrt{-1} = \sqrt{t}\, U^{\frac{n-1}{2}} V^{\frac{n+1}{2}},$$

nous en conclurons

$$X + Y\sqrt{-1} = t U^{n-1} V^{n+1},$$

ce qui donne d'abord

$$X^2+Y^2 = t^2,$$

puis

$$\frac{d\log(X+Y\sqrt{-1})}{dt} = 2\,\frac{d\log(x+y\sqrt{-1})}{dt} = \frac{R+\sqrt{-1}(t-n)}{tR},$$

et, par suite,

$$\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}\sqrt{-1} = (X+Y\sqrt{-1})\,\frac{R+\sqrt{-1}(t-n)}{tR}.$$

Or on tire de là

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = \frac{n^2-1}{R^2},$$

et, enfin, si nous désignons par s l'arc de la courbe,

$$s = \int \frac{(n^2-1)\,dt}{\sqrt{-t^2+2nt-1}},$$

quantité qui ne dépend en effet que des arcs de cercle.

(*) *Voir* sur ces courbes le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. II, p. 252.

III. Pour donner un exemple de la formule de rectification des courbes dans l'espace, je considérerai l'intersection des deux cylindres du second degré

$$y^2 + a^2x^2 - 2ax = 0, \quad z^2 - b^2x^2 + 2bx = 0.$$

Or on tire de ces équations

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a(1-ax)^2}{x(2-ax)}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = -\frac{b(1-bx)^2}{x(2-bx)},$$

et un calcul facile donne le résultat suivant :

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 - a^2 + b^2 + \frac{2(a-b)}{x(2-ax)(2-bx)}.$$

En assujettissant les constantes a et b à la condition $a^2 - b^2 = 1$, de sorte que l'une d'elles reste arbitraire, on aura donc cette expression par l'arc de la courbe de l'intégrale elliptique de première espèce, la plus générale, à savoir

$$s = \int \frac{\sqrt{2(a-b)}\,dx}{\sqrt{x(2-ax)(2-bx)}};$$

tandis que les courbes planes de M. Serret, si elles sont algébriques, ne représentent, comme on l'a vu, l'intégrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(-t^2+2nt-1)}}$$

qu'en supposant n commensurable.

Des fonctions algébriques dont l'intégrale est réductible aux transcendantes elliptiques.

Legendre, dans ses travaux sur les fonctions elliptiques, a eu pour principal but d'étendre le champ du Calcul intégral, en étudiant les transcendantes qui ont pour origine la rectification de l'ellipse, et en construisant des Tables, afin de pouvoir y ramener, comme à des quantités connues, le plus

grand nombre possible des intégrales qui ne peuvent s'obtenir par les arcs de cercle et des logarithmes. C'est dans cette pensée que le grand géomètre a intitulé l'un de ses premiers Mémoires : *Sur l'intégration par arcs d'ellipse;* mais elle n'a été réalisée dans toute son étendue que de nos jours. M. Clebsch, le premier, a donné en général le caractère analytique des équations algébriques $F(x, y) = 0$, dont les variables peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles d'une indéterminée θ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en θ. Il consiste en ce que, si l'on désigne par n son degré, la courbe représentée par cette équation possède un nombre de points doubles égal à $\frac{1}{2}n(n-3)$; cette condition étant remplie, on a, comme on le voit, par les expressions de x et y en θ, la substitution qui ramène aux fonctions elliptiques l'intégrale $\int f(x, y)\,dx$, où $f(x, y)$ est une fonction rationnelle quelconque. Je renverrai, pour la démonstration de cette belle proposition, au Mémoire même de M. Clebsch (*); mais, en raison de son importance, j'en présenterai quelques applications, suffisantes pour l'objet de ce Cours, et qui se lieront naturellement à celles que nous avons précédemment faites de la théorie des courbes unicursales.

I. Soit, en premier lieu, l'équation générale du troisième degré ; les expressions des variables s'obtiennent par le procédé élémentaire que voici. Partant de cette forme de l'équation, que donne la théorie des asymptotes,

$$ABC = D,$$

où A, B, C, D sont des fonctions linéaires de x et y, j'observe que les hyperboles $AB = \theta$, ayant deux asymptotes communes avec la courbe du troisième ordre, la rencontreront seule-

(*) *Ueber diejenigen Curven deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 210). *Voir* aussi l'Ouvrage déjà cité de MM. Clebsch et Gordan, *Theorie des Abelschen Functionen*, p. 69.

ment en deux points, qui seront en effet déterminés par les relations

$$AB = \theta, \quad D = \theta C.$$

Cela posé, soient

$$A = x + ay + a',$$
$$B = x + by + b',$$
$$C = x + cy + c',$$

et faisons, en disposant des constantes g, h, k,

$$D = \frac{gA + hB + k}{a - b};$$

il suffit de remarquer cette identité

$$(b - c)A + (c - a)B + (a - b)C = (b - c)a' + (c - a)b' + (a - b)c'$$

pour avoir les quatre équations nécessaires au calcul de A, B, C, D en fonction du paramètre variable θ. Une élimination facile donne, en effet, si l'on écrit, pour abréger,

$$\alpha = b - c, \quad \beta = c - a, \quad \gamma = a - b, \quad l = (b - c)a' + (c - a)b' + (a - b)c',$$

cette équation en A, savoir

$$(\alpha\theta + g)A^2 - (l\theta - k)A + (\beta\theta + h)\theta = 0.$$

Le discriminant est le polynôme du troisième degré

$$\Theta = (l\theta - k)^2 - 4(\alpha\theta + g)(\beta\theta + h)\theta,$$

et l'on en tire

$$A = \frac{l\theta - k + \sqrt{\Theta}}{2(\alpha\theta + g)}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\frac{\theta}{A} = B = \frac{l\theta - k - \sqrt{\Theta}}{2(\beta\theta + h)},$$

de sorte que, ayant

$$x + ay + a' = \frac{l\theta - k + \sqrt{\Theta}}{2(\alpha\theta + g)},$$

$$x + by + b' = \frac{l\theta - k - \sqrt{\Theta}}{2(\beta\theta + h)},$$

nous en concluons enfin

$$(a-b)x+ab'-ba'=\frac{(l\theta-k)[(a\alpha-b\beta)\theta+ag-bh]+(c\gamma\theta-ag-bh)\sqrt{\Theta}}{2(\alpha\theta+g)(\beta\theta+h)},$$

$$(a-b)y+a'-b'=\frac{(l\theta-k)[(\beta-\alpha)\theta-g+h]-(\gamma\theta-g-h)\sqrt{\Theta}}{2(\alpha\theta+g)(\beta\theta+h)}.$$

Ces formules seraient en défaut dans le cas de $a=b$; je me bornerai à remarquer qu'alors les points de la courbe se déterminent individuellement par des sécantes parallèles aux deux asymptotes dont la direction est commune; de sorte qu'elle est unicursale. Soit maintenant comme application l'équation

$$x^3+y^3-3axy+1=0,$$

qui est la transformée canonique générale des courbes du troisième ordre. Nous mettrons d'abord les asymptotes en évidence, en l'écrivant sous cette forme, où ε désigne une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$(x+y+a)(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 a)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon a)=a^3-1.$$

Or, la quantité D se réduisant à une constante, on est conduit simplement à déterminer les points où la droite

$$x+y+a=\frac{a^3-1}{\theta},$$

parallèle à l'une des asymptotes, rencontre la courbe; et en faisant

$$b=a^3-1,\quad \Theta=4\theta^3-9a^2\theta^2+6ab\theta-b^2,$$

nous obtenons facilement

$$x=\frac{b-a\theta}{2\theta}+\frac{\sqrt{3\Theta}}{6\theta},\quad y=\frac{b-a\theta}{2\theta}-\frac{\sqrt{3\Theta}}{6\theta}.$$

De ces expressions résulte pour l'intégrale $\int y\,dx$, ou plutôt celle-ci

$$\int(y\,dx-x\,dy),$$

qui représente l'aire d'un secteur de la courbe, la valeur suivante :

$$\int (ydx - xdy) = \int \frac{a\theta^3 - 3b\theta^2 + 3a^2b\theta - ab^2}{\theta^2\sqrt{3\Theta}}\, d\theta.$$

On la ramène ensuite, au moyen des formules de réduction qui ont été données, page 293, à cette forme plus simple

$$\int (ydx - xdy) = -\frac{a\sqrt{3\Theta}}{3\theta} + 3\int \frac{a\theta - b}{\sqrt{3\Theta}}\, d\theta,$$

où n'entrent plus que les fonctions de première et de seconde espèce (*).

II. L'équation générale des courbes de quatrième ordre, qui possèdent deux points doubles, dont l'un serait l'origine $x = 0$, $y = 0$, l'autre ayant pour coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$, est, comme il est aisé de le voir, de la forme

$$A(x-\alpha)^2 + B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 = 0,$$

où A, B, C désignent des trinômes homogènes du second degré. Cela étant, je me proposerai, au moins dans un cas particulier, de donner un exemple de détermination des variables en fonction explicite d'une indéterminée, et je choisirai, dans ce but, l'équation suivante :

$$(x - ay)(x - a'y)(x - \alpha)^2 + m^2(x - by)(x - b'y)(y - \beta)^2 = 0.$$

Or, en considérant la courbe du second degré

$$(x - ay)(x - \alpha) = m\theta(x - by)(y - \beta),$$

nous voyons qu'elle a seulement deux points d'intersection avec la proposée, qui varient avec θ. En effet, des huit solu-

(*) L'étude de l'équation générale du troisième degré a conduit M. Aronhold et M. Clebsch à des résultats du plus grand intérêt; pour ce qui concerne l'expression des coordonnées, je renvoie au Mémoire de M. Clebsch : *Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 63, p. 94).

tions des deux équations, celles-ci d'abord :

$$x = 0,\quad y = 0;\quad x = \alpha,\quad y = \beta,$$

et, en second lieu, celles qu'on obtient en posant

$$x - ay = 0,\quad y - \beta = 0;\quad x - by = 0,\quad x - \alpha = 0$$

donnent toutes des points fixes, et les premières représentent quatre solutions comme répondant à des points doubles. Éliminons maintenant $x - \alpha$, et l'on obtiendra

$$(x - ay)(x - b'y) + \theta^2(x - a'y)(x - by) = 0,$$

de sorte que, faisant $x = ty$, t sera déterminé par l'équation du second degré

$$(t - a)(t - b') + \theta^2(t - a')(t - b) = 0;$$

ayant d'ailleurs

$$(t - a)(x - \alpha) = m\theta(t - b)(y - \beta),$$

nous en conclurons les expressions suivantes :

$$x = t\,\frac{\alpha(t - a) - m\theta\beta(t - b)}{t - a - mt\theta(t - b)},\quad y = \frac{\alpha(t - a) - m\theta\beta(t - b)}{t - a - mt\theta(t - b)}.$$

Mais on en verra mieux la nature si l'on rend le dénominateur rationnel en θ; elles prennent alors cette nouvelle forme

$$x = \frac{P + Q\sqrt{\Theta}}{2R},\quad y = \frac{P' - Q'\sqrt{\Theta}}{2R},$$

en supposant

$$\Theta = [(a' - b)\theta^2 + a - b']^2 + 4(a - a')(b - b')\theta^2,$$

$$\begin{aligned} R = {} & mb(a' - b)\theta^4 + [m^2(b' - b) + a'b(a - a')]\theta^3 + m(ab + a'b' - 2bb')\theta^2 \\ & + [m^2(b' - b) + ab'(a - a')]\theta + mb'(a - b'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = {} & mb(a' - b)(\alpha + a'\beta)\theta^4 + [m^2\beta(b' - b)(a' + b) + 2\alpha ab'(a - a')]\theta^3 \\ & + m[\alpha(2ab' + 2a'b - ab - 2bb' - a'b') \\ & \qquad + \beta(aa'b + aa'b' - abb' - a'bb')]\theta^2 \\ & + [m^2\beta(b' - b)(a + b') + 2\alpha ab'(a - a')]\theta + mb'(a - b')(\alpha + a\beta), \end{aligned}$$

$$P' = m(a'-b)(\alpha+b\beta)\theta^4 + [2m^2\beta(b'-b)+\alpha(a-a')(a'+b)]\theta^3$$
$$+ m[\alpha(a+a'-b-b')+\beta(2ab'+2a'b-ab-2bb'-a'b']\theta^2$$
$$+ [2m^2\beta(b'-b)+\alpha(a-a')(a+b')]\theta + m(a-b')(\alpha+\beta b'),$$

$$Q = mb(\alpha - a'\beta)\theta^2 + m^2\beta(b-b')\theta + mb'(\alpha - a\beta),$$
$$Q' = m(\alpha - b\beta)\theta^2 + \alpha(a-a')\theta + m(\alpha - b'\beta).$$

La polaire réciproque des courbes du troisième ordre appartient encore à la catégorie dont nous nous occupons. Elle représente, en effet, et de la manière la plus générale (*), une courbe du sixième ordre qui possède neuf points de rebroussement; or les formules

$$X = -\frac{y'}{xy'-yx'}, \quad Y = +\frac{x'}{xy'-yx'}$$

donneront les coordonnées en fonction explicite de θ, si l'on y remplace x et y par les expressions obtenues précédemment pour les courbes du troisième ordre. Ainsi l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy + 1 = 0,$$

ayant pour polaire, d'après M. Cayley,

$$4(a^3-1)(X^3Y^3+X^3+Y^2)+(X^3+Y^3+1)^2$$
$$-6a^2XY(X^3+Y^3+1)+3a(a^3-4)X^2Y^2 = 0,$$

les formules obtenues plus haut

$$x = \frac{b-a\theta}{2\theta} + \frac{\sqrt{3\Theta}}{6\theta}, \quad y = \frac{b-a\theta}{2\theta} - \frac{\sqrt{3\Theta}}{6\theta}$$

conduiront aux valeurs suivantes :

$$X = \frac{2\theta^3 - 3ab\theta + b^2 + b\sqrt{3\Theta}}{2(a\theta^3 - 3b\theta^2 + 3a^2b\theta - ab^2)}, \quad Y = \frac{2\theta^3 - 3ab\theta + b^2 - b\sqrt{3\Theta}}{2(a\theta^3 - 3b\theta^2 + 3a^2b\theta - ab^2)}.$$

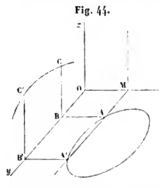
(*) Une courbe du sixième ordre dépend de 27 constantes, et comme un point de rebroussement entraîne deux conditions, il ne restera, en supposant neuf points de cette nature, que neuf paramètres indéterminés, qui sont, en effet, donnés par la courbe générale du troisième ordre dont on a formé la polaire.

Volumes des corps limités par des surfaces quelconques.

I. Soit, par rapport à trois axes coordonnés rectangulaires $z = f(x, y)$, l'équation d'une surface quelconque; nous nous proposons d'évaluer le volume compris entre le plan des xy, cette surface et un cylindre parallèle à l'axe des z, dont la trace $\varphi(x, y) = 0$ soit une courbe fermée.

A cet effet, coupons le solide par le plan $x = \text{OM}$; figurons sur le plan des zy en BCC'B' (*fig.* 44) l'intersection ainsi obtenue qui s'y projette en véritable grandeur, et traçons aussi la courbe $\varphi(x, y) = 0$. En supposant à son égard qu'à toute valeur $x = \text{OM}$ de l'abscisse correspondent seulement deux ordonnées

Fig. 44.



$$y = \text{AM}, \quad y_1 = \text{A'M},$$

nous commencerons par évaluer l'aire de la courbe

$$z = f(\text{OM}, y),$$

comprise entre ces deux ordonnées, et qui est représentée sur la figure par BCC'B', les points B et B' étant les projections sur Oy de A et A'. On obtiendra ainsi l'intégrale définie

$$\int_{\text{AM}}^{\text{A'M}} f(\text{OM}, y)\,dy,$$

où il importe d'observer que la variable x qui entre dans OM, AM, A'M est supposée constante. Faisant, pour plus de clarté,

$$y = \text{AM} = \theta(x),$$
$$y_1 = \text{A'M} = \theta_1(x),$$

nous poserons

$$\text{BCC'B'} = \int_{\text{AM}}^{\text{A'M}} f(\text{OM}, y)\,dy = \int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x, y)\,dy = \Theta(x).$$

Cela étant, si l'on partage le volume proposé en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à l'axe Ox, et dont la distance constante soit dx, on pourra, à ces éléments, substituer des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, pour hauteur commune dx, et dont les volumes seront représentés par $\Theta(x)dx$. La somme de ces éléments entre deux limites $x=a$, $x=b$, c'est-à-dire l'intégrale $\int_a^b \Theta(x)dx$, donnera ainsi la portion du solide proposé qui est comprise entre les plans $x=a$, $x=b$, et nous obtiendrons le volume entier V. Si nous faisons correspondre les abscisses a et b aux points extrêmes de la courbe $\varphi(x,y)=0$, où la tangente est parallèle à l'axe des y, ce qui donne les deux équations

$$\varphi(x,y)=0, \quad \frac{d\varphi(x,y)}{dy}=0.$$

En conduisant ainsi à l'expression

$$V=\int_a^b \Theta(x)dx=\int_a^b dx\int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x,y)\,dy,$$

la Géométrie donne une notion analytique nouvelle, extension de la notion fondamentale de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$: c'est celle de l'intégrale double d'une fonction de deux variables $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$, calculée en supposant que ces variables x et y représentent tous les points de l'intérieur d'une courbe fermée $\varphi(x,y)=0$. Mais nous ne nous occuperons point dans ce Cours de l'étude des intégrales doubles, qui est d'une grande importance en Analyse, et je me bornerai à éclaircir par deux applications principales les considérations précédentes.

II. Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et pour base du cylindre

$$\varphi(x, y) = 0,$$

l'ellipse quelconque

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

ce qui donnera

$$y = \theta(x) = -\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}},$$

$$y_1 = \theta_1(x) = +\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}.$$

Nous aurons, pour déterminer $\Theta(x)$, en considérant seulement la valeur positive de z, l'expression

$$\Theta(x) = c\int_{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy,$$

qu'il est possible d'obtenir sous une forme assez compliquée à l'aide de termes algébriques et transcendants. Mais si les limites de l'intégrale sont précisément les valeurs de y, qui annulent la quantité sous le radical, la formule relative à l'aire du cercle

$$\int_{-A}^{+A} \sqrt{A^2 - y^2} = \pi A^2$$

donne la valeur purement algébrique

$$\Theta(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

La base du cylindre, dans cette supposition, n'est autre que la trace de la surface sur le plan des xy, de sorte que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \Theta(x)\,dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2} - x_0 + \frac{x_0^3}{3a^2}\right)$$

représentera le volume de la portion d'ellipsoïde située au-dessus du plan des xy, et comprise entre deux plans conduits perpendiculairement à l'axe des x, aux distances x_0 et x de

l'origine. Or les valeurs extrêmes de l'abscisse sont évidemment $x = -a$ et $x = +a$, et nous aurons, pour la moitié du volume total,

$$V = \pi bc \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{2\pi abc}{3}.$$

III. En général, pour déterminer le volume limité par une surface fermée

$$F(x, y, z) = 0,$$

que nous supposerons donner seulement deux valeurs de z en fonction de x et de y, on prendra, au lieu du cylindre quelconque $\varphi(x, y) = 0$, le cylindre circonscrit à cette surface, et la différence des volumes qui se rapportent à la plus grande et à la plus petite valeur de z fournira le résultat cherché. Or, la condition pour que le plan tangent

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0$$

soit parallèle à l'axe des z étant $\frac{dF}{dz} = 0$, le lieu des points de contact de tous ces plans, et par conséquent la courbe de contact du cylindre sera représentée par les relations

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF(x, y, z)}{dz} = 0,$$

et l'élimination de z donne, par conséquent, l'équation cherchée $\varphi(x, y) = 0$. Il restera enfin à calculer les valeurs limites de x, qui correspondent aux points où la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe des y, d'après les conditions

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = 0.$$

Mais on aura un procédé plus simple si l'on observe qu'en ces points le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des x; on tire de là en effet

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

IV. Pour seconde application je donnerai, d'après M. Catalan (*), l'évaluation du volume de la portion du cylindre circulaire

$$x^2+y^2=1$$

comprise au-dessus du plan des xy, et limitée par la surface

$$z=\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}.$$

On ne peut plus alors obtenir sous forme finie la fonction $\Theta(x)$, l'intégrale

$$\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,dy=\int\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2)(1-x^2-y^2)}}\,dy$$

dépendant des fonctions elliptiques, puisque la variable y entre au quatrième degré sous le radical carré; nous procéderons comme il suit. Supposant les constantes α et β moindres que l'unité, j'observe d'abord que toute section de la surface

$$z=\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2x^2}{1-x^2-y^2}}$$

par un plan perpendiculaire à l'axe des z est une ellipse. C'est ce que montre l'équation écrite de cette manière

$$(z^2-\alpha^2)x^2+(z^2-\beta^2)y^2=z^2-1,$$

et l'on reconnaît que, pour $z<1$, la section est imaginaire, qu'elle donne un seul point, l'origine des coordonnées pour $z=1$, puis une suite d'ellipses grandissant avec z, et ayant pour limite le cercle $x^2+y^2=1$, quand on suppose cette quantité infinie. D'après cela, nous modifierons la méthode générale en décomposant le solide, non plus en tranches parallèles au plan des yz, mais en couronnes cylindriques parallèles à l'axe des z, et dont voici l'expression.

Soit

$$Z=\pi\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

(*) Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples (*Journal de M. Liouville*, t. IV, p. 323).

l'aire de l'ellipse

$$(z^2-\alpha^2)x^2+(z^2-\beta^2)y^2=z^2-1.$$

Si l'on fait croître z de dz, Z croîtra pareillement de sa différentielle dZ, et le volume compris entre les deux cylindres concentriques infiniment voisins, dont les bases sont les ellipses qui correspondent aux valeurs z et $z+dz$, sera $z\,dZ$, à un infiniment petit près du second ordre. La somme de tous ces éléments, lorsque z croît de l'unité à l'infini, donne donc, pour le volume cherché, l'intégrale

$$V=\int_1^\infty z\,dZ=\pi\int_1^\infty z\,d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right].$$

On remarquera combien est simple un pareil résultat, eu égard à l'extrême complication qui s'était offerte en traitant par la méthode générale l'intégrale double proposée. Pour le réduire encore, nous considérerons, au lieu de l'intégrale prise depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$ l'intégrale indéfinie, et nous écrirons

$$\int z\,d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right]=\frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}-\int\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}dz.$$

C'est le second membre de cette égalité qui exige une transformation que nous allons faire, car il donnerait, pour $z=\infty$, la différence indéterminée de deux quantités infinies. Je partirai à cet effet de l'identité

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z}\right]$$

$$=\frac{z^4-\alpha^2\beta^2}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}=\frac{z^2}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}-\frac{\alpha^2\beta^2}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}},$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$\frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z}=\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}-\int\frac{\alpha^2\beta^2dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}.$$

Éliminant donc, au moyen de cette relation, la quantité $\displaystyle\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$, qui devient infinie avec z, nous trou-

vons pour résultat

$$\int z\,d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right]$$

$$=\frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}-\frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z}+\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

$$-\int\frac{\alpha^2\beta^2dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

$$=\frac{z^2(\alpha^2+\beta^2-1)-\alpha^2\beta^2}{z\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}+\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}-\int\frac{\alpha^2\beta^2dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}};$$

et aucun des termes de cette équation ne devenant plus infini aux limites, on en conclut la valeur

$$V=\pi\left[\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}+\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right.$$
$$\left.-\int_1^\infty\frac{\alpha^2\beta^2dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right].$$

Bientôt nous en aurons l'application à une question importante.

Quadrature des surfaces courbes quelconques.

L'aire d'une portion de surface courbe comprise dans l'intérieur d'un contour fermé quelconque se définit comme la limite vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite, dont toutes les faces diminuent indéfiniment, et terminée par un contour polygonal ayant le contour donné pour limite. En partant de cette définition, analogue à celle qui a été employée pour la longueur d'une ligne courbe, il faut démontrer que la limite de la surface polyédrale existe, et a une valeur indépendante de la loi de décroissement de ses faces. Mais la démonstration est longue, et, afin d'abréger, je traiterai la question en me plaçant à un point de vue différent.

Soit

$$z=f(x,y)$$

l'équation de la surface proposée rapportée à des coordonnées rectangulaires. Je considère d'une part deux plans menés perpendiculairement à l'axe des x, aux distances x et $x + dx$ de l'origine, et de l'autre deux plans perpendiculaires à l'axe des y et aux distances y et $y + dy$. Ces quatre plans détermineront sur la surface un quadrilatère ω, dont la projection sur le plan des xy sera un rectangle ayant pour côtés dx et dy. Cela posé, j'admettrai qu'on puisse remplacer ω par la portion du plan tangent en un quelconque de ses points qui se projette sur le même rectangle. C'est donc prendre, en nommant λ l'angle du plan tangent considéré avec le plan des xy,

$$\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\lambda},$$

et comme une variation infiniment petite dans cet angle n'altérera ω que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, on peut considérer le plan tangent au point xyz, qui est l'un des sommets du quadrilatère, ce qui donnera

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}}.$$

On a ainsi, en posant, suivant l'usage, $p = \frac{df}{dx}$, $q = \frac{df}{dy}$,

$$\omega = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Soit maintenant

$$\varphi(x, y) = 0$$

la projection du contour limité de l'aire; il s'agira d'effectuer la somme de tous les éléments ω correspondant aux points contenus à l'intérieur de cette courbe, question d'Analyse identique avec celle que l'on vient de traiter; d'où l'on voit qu'on peut assimiler en général l'expression analytique de l'aire d'une surface à celle du volume d'un cylindre ayant pour trace la courbe $\varphi(x, y) = 0$ et limité par la surface $z = \sqrt{1+p^2+q^2}$. L'application la plus importante concerne l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

on a alors

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z} \quad \text{et} \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

et la moitié de l'aire totale sera l'intégrale

$$\int\int\sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4}x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^4}y^2}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

si l'on prend pour la courbe limite la trace de l'ellipsoïde sur le plan des xy

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Or, en faisant

$$\frac{x}{a} = x', \quad \frac{y}{b} = y',$$

ce qui donnera

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

cette intégrale prend la forme

$$\int\int\sqrt{\frac{1 - \alpha^2 x'^2 - \beta^2 y'^2}{1 - x'^2 - y'^2}}\,dx'dy',$$

où l'on a posé

$$\alpha^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad \beta^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2},$$

quantités qui sont l'une et l'autre inférieures à l'unité lorsqu'on suppose

$$a > b > c;$$

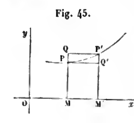
c'est l'expression déterminée précédemment en l'assimilant à un volume, et que Legendre a réussi le premier, par une méthode savante et plus difficile, à réduire aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Volume et surface des corps de révolution.

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires; je dis que le volume engendré par le segment

MM′PP′ (*fig.* 45) tournant autour de l'axe des x, et dont la base $MM' = dx$ est égal à $\pi \overline{MP}^2 dx$ aux infiniment petits près du second ordre. Menons en effet par les points P et P′ des parallèles à l'axe, de manière à comprendre le segment entre les rectangles MPM′Q′, MQM′P′. Le volume engendré par le segment sera donc compris entre les deux cylindres engendrés par les rectangles, qui, étant de même base, sont entre eux dans le rapport $\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MQ}^2}$. Or ce rapport est à la limite égal à l'unité, ce qui démontre la proposition annoncée. On en conclut, pour le volume engendré par le segment compris entre deux ordonnées qui correspondent aux abscisses quelconques $x = a$, $x = b$, cette expression :

Fig. 45.



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Pour obtenir l'aire de la surface qui est donnée par la révolution de la même courbe, je la considérerai comme la limite de la somme des aires des troncs de cône, décrits par les côtés d'un polygone infinitésimal inscrit. Soit PP′ l'un de ces côtés, l'expression de l'aire sera

$$\frac{1}{2}\left(\text{circonf. MP} + \text{circonf. M'P'}\right) \text{PP}' = 2\pi\left(y + \frac{1}{2}dy\right)ds,$$

ou simplement $2\pi y ds$ aux infiniment petits près du second ordre. La somme des éléments ainsi déterminés entre la limite $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire l'intégrale

$$S = 2\pi \int_a^b y\,ds,$$

sera donc l'aire de la surface résultant de la révolution du segment de la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe des abscisses.

Soit, comme exemple, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on aura

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\,\frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2 y};$$

donc

$$y\,ds = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx.$$

Si l'on suppose $a > b$, de sorte que l'ellipsoïde ait été engendré par l'ellipse tournant autour de son grand axe, on écrira

$$S = \frac{2\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\int\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^4} - x^2}\,dx,$$

et l'intégrale à obtenir sera celle qu'on a déterminée (p. 390) pour l'aire d'un segment de cercle. En prenant pour limite inférieure zéro, on trouvera donc

$$S = \frac{\pi b x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{a^2 x}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Si l'on suppose en second lieu $b > a$, l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, et en écrivant

$$S = \frac{2\pi b}{a^2\sqrt{b^2 - a^2}}\int\sqrt{\frac{a^4}{b^2 - a^2} + x^2}\,dx,$$

on est ramené à l'intégrale dont dépend la rectification de la parabole, de sorte qu'il vient, en prenant encore zéro pour limite inférieure,

$$S = \frac{\pi b x\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\log\frac{x\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2}.$$

Je ne m'étendrai pas davantage sur ces applications du Calcul intégral, et en renvoyant aux Ouvrages déjà cités de M. Bertrand et de M. Serret, où elles sont traitées avec de

grands développements, je passerai à un dernier point, qui a pour objet le calcul numérique des intégrales définies.

Évaluation approchée des intégrales.

Les méthodes d'approximation sont de la plus grande importance dans le Calcul intégral, à cause du petit nombre de fonctions qu'on peut intégrer sous forme finie explicite. L'une des plus intéressantes est celle que Gauss a donnée dans son célèbre Mémoire intitulé : *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (*Commentaires de la Société royale de Göttingue*, 1815); je vais l'exposer succinctement en commençant par la remarque suivante.

I. Supposons qu'entre les limites x_0 et X une fonction $f(x)$ soit développable en série de cette manière :

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + r_n,$$

les termes u_0, u_1,... étant des fonctions continues de x, et le reste r_n s'annulant pour n infini, je dis qu'on aura pour toute valeur de la variable comprise entre x_0 et X le développement en série infinie

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \ldots.$$

Effectivement, l'expression proposée de $f(x)$ donnant

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \int_{x_0}^{x} r_n\,dx,$$

il suffit de prouver que $\int_{x_0}^{x} r_n\,dx = 0$ pour n infini. On y parvient à l'aide d'une formule importante que je vais établir. Partant de la relation

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

donnée par la série de Taylor limitée à ses deux premiers termes, j'observe qu'on peut écrire

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx,$$

de sorte qu'il vient

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx=(x-x_0)f'[x_0+\theta(x-x_0)],$$

ou, en mettant $f(x)$ au lieu de la fonction quelconque $f'(x)$, et posant $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=(x-x_0)f(\xi).$$

Cette quantité ξ est intermédiaire, comme on voit, entre x_0 et x, de sorte qu'en appliquant ce résultat à l'intégrale de $r_n\,dx$ nous aurons

$$\int_{x_0}^{x} r_n\,dx=(x-x_0)\rho_n,$$

ρ_n désignant ce que devient r_n pour $x=\xi$; mais on a admis que $r_n=0$ pour n infini; on a donc également $\rho_n=0$, ce qui démontre la propriété annoncée. Ajoutons que, si la série

$$u_0+u_1+u_2+\ldots,$$

supposée convergente pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, devient divergente pour $x=\mathrm{X}$, l'équation

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} u_0\,dx+\int_{x_0}^{x} u_1\,dx+\ldots$$

aura lieu pour $x=\mathrm{X}-\varepsilon$, si petit que soit ε. Or les deux membres sont des fonctions continues de x, ayant constamment la même valeur; leurs limites pour $\varepsilon=0$ seront donc égales, pourvu que la série du second membre soit convergente.

J'appliquerai ce qui précède aux développements

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots,$$

qu'on tire de la formule du binôme, et qui seront convergents pour x compris entre zéro et l'unité. En intégrant les deux membres, et prenant pour limite inférieure des intégrales zéro, nous en conclurons

$$\text{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

$$\text{arc sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

la variable étant inférieure à l'unité. Pour $x = 1$, les développements de $\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ cessent d'avoir lieu; mais, les séries obtenues pour arc tang$x$ et arc sin$x$ étant alors convergentes, on trouve que (*) :

$$\text{arc tang} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

$$\text{arc sin} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots.$$

Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

qui est la fonction elliptique de première espèce. En supposant la constante $k < 1$, et x non supérieur à l'unité, on

(*) La série de Maclaurin donnerait difficilement les développements de arc tang$x$ et arc sin$x$, que nous tirons immédiatement du Calcul intégral, à cause de l'expression compliquée des dérivées d'un ordre quelconque de ces fonctions. (*Voir* sur ces dérivées le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* de M. Bertrand, t. I, p. 143.)



aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6x^6 + \dots,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{k^2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{k^4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{k^6x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \dots.$$

Nous en conclurons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots,$$

et ce développement, subsistant pour $x = 1$, donnera la formule suivante, employée en Mécanique dans l'étude du pendule, savoir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6 + \dots\right].$$

On trouvera semblablement pour la longueur du quart de l'ellipse

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5k^6 - \dots\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{3}{k^4} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^6}{5}\dots\right],$$

et nous voyons que, la première intégrale étant désignée par F, et la seconde par E, suivant la notation de Legendre, on aura

$$k^2\frac{d}{dk}\left(\frac{E}{k}\right) = -F,$$

ou bien

$$k\frac{dE}{dk} = E - F,$$

relation qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques.

II. La méthode d'évaluation approchée des intégrales, reposant sur le développement en série convergente de la fonction à intégrer, est donc restreinte au cas où l'on possède un tel développement. Or le théorème de Maclaurin, qui donne une formule générale de développement, exige la formation des dérivées successives de la fonction, et entraîne le plus souvent dans de longs et pénibles calculs, même dans ces cas si élémentaires des expressions arc sin x, arc tang x. A la vérité on peut, à l'égard du reste, s'affranchir des discussions que nous avons faites, en considérant les fonctions $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, par ce beau théorème de Cauchy, savoir :

Toute fonction sera développable en série convergente, suivant les puissances entières et croissantes de la variable, si le module de cette variable est inférieur au plus petit module des valeurs qui rendent la fonction discontinue (*).

Mais le calcul des coefficients subsiste avec toutes ses difficultés, et nous allons maintenant montrer de quelle manière, en admettant seulement la possibilité du développement, on a entièrement réussi à l'éviter.

Soit l'intégrale proposée

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

les limites étant finies, et la fonction $\varphi(x)$ étant développable en série convergente depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\beta$, de sorte que l'on ait

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_n x^n + \ldots.$$

Je désignerai par a, b,.... l, n quantités arbitraires comprises entre α et β, et je vais prouver qu'on peut obtenir pour les coefficients A, B,..., L des valeurs indépendantes de la nature de la fonction $\varphi(x)$, et telles qu'on ait

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = A\varphi(a) + B\varphi(b) + \ldots + L\varphi(l) + R + \ldots,$$

(*) Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 580.



R devenant nul lorsqu'on néglige les quantités k_n, k_{n+1}, ..., dont l'indice est égal ou supérieur à n.

Effectivement, on a, d'une part,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = (\beta-\alpha)k_0 + \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}k_1 + \frac{\beta^3-\alpha^3}{3}k_2 + \ldots.$$

et, de l'autre,

$$\begin{aligned} A\varphi(a) + B\varphi(b) + \ldots + L\varphi(l) = k_0 & \;(A + B + \ldots + L) \\ & + k_1(Aa + Bb + \ldots + Ll) \\ & + k_2(Aa^2 + Bb + \ldots + Ll^2) \\ + \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de sorte qu'on réduira R à contenir seulement k_n, k_{n+1},..., en posant les n équations linéaires

$$\begin{aligned} \beta-\alpha &= A + B + \ldots + L, \\ \frac{\beta^2-\alpha^2}{2} &= Aa + Bb + \ldots + Ll, \\ \frac{\beta^3-\alpha^3}{3} &= Aa^2 + Bb^2 + \ldots + Ll^2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\beta^n-\alpha^n}{n} &= Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \ldots + Ll^{n-1}. \end{aligned}$$

Ces relations, où n'entre rien de relatif à la fonction $\varphi(x)$, déterminent donc A, B,..., L en fonction de a, b,..., l des limites α, β, et la valeur approchée de l'intégrale se calculera au moyen des n valeurs de cette fonction, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$,...., $\varphi(l)$, sans employer son développement en série. Voici maintenant une importante remarque de Gauss.

III. Multiplions la première égalité par $\frac{1}{x}$, la seconde par $\frac{1}{x^2}$, ..., et ajoutons membre à membre, il viendra

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{x} + \frac{\beta^2}{2x^2} + \ldots + \frac{\beta^n}{nx^n} - \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha^2}{2x^2} - \ldots - \frac{\alpha^n}{nx^n} \\ & = A\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{x^n}\right) + B\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{b^{n-1}}{x^n}\right) \\ & \qquad + \ldots + L\left(\frac{1}{x} + \frac{l}{x^2} + \ldots + \frac{l^{n-1}}{x^n}\right). \end{aligned}$$

On reconnaît dans le premier membre le développement de

$$\log\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)-\log\left(1-\frac{\beta}{x}\right)$$

en négligeant $\frac{1}{x^{n+1}}$, $\frac{1}{x^{n+2}}$, ..., et, dans le second, les expressions telles que

$$\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots+\frac{a^{n+1}}{x^n}$$

donnent $\frac{1}{x-a}$, en négligeant de même les puissances de $\frac{1}{x}$ supérieures à la $n^{ième}$. Il en résulte une détermination sous un nouveau point de vue des coefficients A, B,..., L, par cette condition que la fonction rationnelle

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}=\sum\frac{A}{x-a},$$

et la quantité transcendante

$$\log\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)-\log\left(1-\frac{\beta}{x}\right) \quad \log\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)$$

aient, aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{n+1}}$, le même développement suivant les puissances décroissantes de x. Je dis de plus que, en partant de cette égalité,

$$\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\sum\frac{A}{x-a}+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+2}}+\ldots,$$

où ε, ε_1,... sont des constantes, on peut retrouver l'expression de l'intégrale définie proposée $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, et calculer la valeur de R qui donne la mesure de l'approximation. Représentant à cet effet $\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ par $\int_\alpha^\beta \frac{dz}{x-z}$, j'observe qu'on aura,

en développant suivant les puissances descendantes de x,

$$\int_\alpha^\beta dz\left(\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\frac{z^2}{x^3}+\ldots\right)$$
$$=\sum \mathrm{A}\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots\right)+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+2}}+\ldots.$$

Cela posé, je multiplie par $\varphi(x)$, et j'égale dans les deux membres les termes en $\frac{1}{x}$. Dans le produit

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots\right)(k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots),$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ est

$$k_0+k_1a+k_2a^2+\ldots=\varphi(a);$$

le même calcul donne ensuite $\varphi(z)$ sous le signe d'intégration, et la partie $\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon_1}{x^{n+2}}$ conduit à la quantité

$$\varepsilon k_n+\varepsilon' k_{n+1}+\varepsilon'' k_{n+2}+\ldots,$$

de sorte qu'il vient

$$\int_\beta^\alpha \varphi(z)\,dz=\sum \mathrm{A}\varphi(a)+\varepsilon k_n+\varepsilon' k_{n+1}+\ldots,$$

ce qui est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir.

IV. Jusqu'ici nous avons laissé entièrement arbitraires les quantités $a, b, \ldots, l$; or l'objet essentiel de l'analyse de Gauss est de les déterminer de manière à ne laisser subsister, dans la valeur de R, que les coefficients de $\varphi(x)$ de l'ordre le plus élevé qu'il sera possible. Ayant, comme on l'a vu,

$$\mathrm{R}=\varepsilon k_n+\varepsilon' k_{n+1}+\varepsilon'' k_{n+2}+\ldots,$$

on disposera donc de ces quantités, qui sont au nombre de n, de manière à avoir $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=0, \ldots, \varepsilon^{n-1}=0$, et il en résultera cette expression

$$\mathrm{R}=\varepsilon^n k_{2n}+\varepsilon^{(n+1)}k_{2n+1}+\varepsilon^{(n+2)}k_{2n+2}+\ldots,$$

où figurent seulement des termes d'indice égal et supérieur à $2n$. En se fondant sur la théorie des fractions continues, Gauss conclut alors immédiatement de la relation

$$\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\sum\frac{A}{x-a}+\frac{\varepsilon^{(n)}}{x^{2n+1}}+\frac{\varepsilon^{(n+1)}}{x^{2n+2}}+\ldots$$

que les fractions rationnelles $\sum\frac{A}{x-a}$ pour $n=1, 2, 3,\ldots$ sont les réduites successives du développement de $\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}$, dont la loi générale est aisée à obtenir. Ne devant rien emprunter à cette théorie, je vais parvenir aux résultats de l'illustre géomètre par une autre voie, en les déduisant des propriétés les plus simples des polynômes X_n de Legendre, dont j'ai précédemment donné déjà la définition.

Je rappelle, à cet effet, qu'on a, en désignant par N une constante, cette expression

$$X_n = N\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

d'où résulte d'abord que toutes les racines de l'équation $X_n=0$ sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. Nous en avons ensuite tiré l'équation différentielle du second ordre (p. 210),

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2}+2x\frac{dX_n}{dx}-n(n+1)X_n=0.$$

Enfin l'étude de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ nous a donné un polynôme entier $F_n(x)$ (p. 278), tel que le quotient $\frac{F_n(x)}{X_n}$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable, coïncide avec la série

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right),$$

aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$. En supposant

$$\alpha=-1,\quad \beta=1,$$

on voit que la fraction rationnelle

$$\sum \frac{A}{x-a}$$

sera précisément

$$\frac{F_n(x)}{X_n};$$

par conséquent nous devrons prendre pour les quantités a, b,..., l les racines de l'équation $X_n = 0$, et la théorie de la décomposition en fractions simples donnera pour les constantes A, B,..., L, en posant $X_n = F(x)$, les valeurs suivantes:

$$A = \frac{F_n(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{F_n(b)}{F'(b)}, \dots, \quad L = \frac{F_n(l)}{F'(l)}.$$

Elles dépendent du polynôme $F_n(x)$ dont nous avons donné l'origine, et qu'on obtiendrait d'une manière plus simple et plus directe, en remarquant qu'il constitue la partie entière en x dans le produit

$$X_n \log \frac{x+1}{x-1} = 2X_n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right);$$

mais nous allons en donner l'expression au moyen de la dérivée de X_n.

IV. Déterminons la constante N dans l'équation

$$X_n = N \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

par la condition $X_n = 1$ pour $x = 1$, et en posant

$$X_n = F(x);$$

considérons, pour la décomposer en fractions simples, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-x^2)F'^2(x)}.$$

Les seules racines du dénominateur qui ne soient pas doubles étant 1 et -1, je ferai

$$\frac{1}{(1-x^2)F'^2(x)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \dots + \frac{L}{(x-l)^2}$$
$$+ \frac{A'}{x-a} + \frac{B'}{x-b} + \dots + \frac{L'}{x-l},$$

ou, pour abréger,

$$\frac{1}{(1-x^2)F'^2(x)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a}\right].$$

Cela étant, on a d'abord

$$\alpha = -\frac{1}{2F^2(1)}, \quad \beta = \frac{1}{2F^2(-1)},$$

et, par suite,

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

car on a supposé $F(1)=1$, et $F(x)$ renfermant seulement des puissances de x de même parité; $F^2(-x)$ a la même valeur que $F^2(x)$.

Soit ensuite $x = a + h$, A et A′ seront les coefficients des termes en $\frac{1}{h^2}$ et $\frac{1}{h}$ dans le développement du premier membre, suivant les puissances croissantes de cette quantité. Or on a

$$\frac{1}{1-(a+h)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{2a}{(1-a^2)^2}h + \ldots,$$

$$\frac{1}{F'^2(a+h)} = \frac{1}{F'^2(a)}\frac{1}{h^2} - \frac{F''(a)}{F'^3(a)}\frac{1}{h} + \ldots,$$

et le produit des seconds membres donne immédiatement les valeurs

$$A = \frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)}, \quad A'' = \frac{(a^2-1)F''(a) + 2aF'(a)}{(1-a^2)^2F'^3(a)}.$$

Mais l'équation différentielle

$$(x^2-1)F''(x) + 2xF'(x) - n(n+1)F(x) = 0$$

nous montre, en y posant $x = a$, que $A'' = 0$, de sorte qu'on parvient à l'égalité suivante

$$\frac{1}{(1-x^2)F^2(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) + \sum\frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)^2}.$$

En intégrant, elle donne

$$\int_\infty^x \frac{dx}{(1-x^2)F^2(x)} = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} - \sum \frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)} + \ldots,$$

puisque le second membre s'évanouit pour $x=\infty$.

Or, en développant l'intégrale suivant les puissances décroissantes de x, on aura, $F(x)$ étant du $n^{ième}$ degré, une série de la forme

$$\frac{\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \ldots,$$

d'où la relation

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sum \frac{2}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)} + \frac{2\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{2\lambda'}{x^{2n+2}} + \ldots,$$

et l'on en tire, comme nous avons vu,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \sum \frac{2\varphi(a)}{(1-a^2)F'^2(a)} + R,$$

si l'on pose

$$R = 2(\lambda k_{2n} + \lambda' k_{2n+1} + \ldots).$$

V. L'intégrale $\int_\alpha^\beta \varphi(z)\,dz$, prise entre deux limites quelconques, que je supposerai finies, se transforme, en posant

$$z = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}x,$$

dans celle-ci :

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}x\right)dx,$$

à laquelle s'applique donc la méthode d'approximation que nous venons d'exposer. Cette méthode exige la connaissance des racines $a, b, \ldots, l$ des équations $X_n = 0$, et les valeurs des quantités correspondantes

$$A = \frac{2}{(1-a^2)F'^2(a)}, \quad B = \frac{2}{(1-b^2)F'^2(b)}, \ldots, \quad L = \frac{2}{(1-l^2)F'^2(l)}.$$

On les trouvera dans le Mémoire de Gauss, auquel je renverrai, calculées respectivement avec dix et quinze décimales, et je me bornerai à remarquer qu'ayant, dans les cas de $n = 1, 2, 3$,

$$X_1 = x, \quad X_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad X_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

on en déduit, pour les expressions approchées correspondantes de l'intégrale,

1°

$$(\beta - \alpha)\varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right);$$

2°

$$\frac{\beta - \alpha}{2}\left[\varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

3°

$$\frac{\beta - \alpha}{2}\left[\frac{5}{9}\varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) + \frac{5}{9}\varphi\left(\frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Gauss a fait l'application de sa méthode au calcul du logarithme intégral $\int \frac{dz}{\log z}$ pris entre les limites $\alpha = 100,000$, $\beta = 200,000$, et trouve ainsi

Pour $n = 2$	8405,954599
Pour $n = 3$	8406,236775
Pour $n = 4$	8406,242970
Pour $n = 5$	8406,243117
Pour $n = 6$	8406,243121
Pour $n = 7$	8406,243121

A cette occasion, je ferai observer que la partie entière de la

valeur numérique de cette intégrale donne très-approximativement le nombre des nombres premiers compris entre les deux limites; car, d'après les Tables, il y a 9592 nombres premiers de 1 à 100000, et 17984 de 1 à 200000; or la différence est 8392; c'est, à 14 unités près, le nombre 8406 qui est donné par le logarithme intégral.

VI. Les intégrales définies de cette forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui s'offrent souvent, donnent lieu à une méthode spéciale d'approximation qu'il convient d'indiquer pour sa simplicité, et aussi afin de donner un second exemple des considérations précédentes.

Soit $F(x)$ le polynôme entier de degré n, défini par l'égalité

$$F(x) = \cos n(\arccos x),$$

on aura

$$F'(x) = n \sin n(\arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, par conséquent,

$$F'(x) = n \frac{\sqrt{1-F^2(x)}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or de là résulte une approximation du radical $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ par une fraction rationnelle, car on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{F'(x)}{nF(x)}\left[1-\frac{1}{F^2(x)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{F'(x)}{nF(x)}\left[1+\frac{1}{2}\frac{1}{F^2(x)}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{F^4(x)}+\ldots\right],\end{aligned}$$

et, en observant que le développement suivant les puissances

décroissantes de x, la quantité

$$\frac{F'(x)}{nF(x)}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{F(x)}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{F^2(x)}+\ldots\right],$$

est évidemment de la forme

$$\frac{\lambda}{x^{2n+1}}+\frac{\lambda'}{x^{2n+2}}+\frac{\lambda''}{x^{2n+3}}+\ldots,$$

nous poserons, en conséquence,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{F'(x)}{nF(x)}+\frac{\lambda}{x^{2n+1}}+\frac{\lambda'}{x^{2n+2}}+\ldots.$$

Cela établi, je rappelle que l'on a

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}},$$

de sorte que l'égalité précédente devient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}=\frac{F'(x)}{nF(x)}+\frac{\lambda}{x^{2n+1}}+\frac{\lambda'}{x^{2n+2}}+\ldots;$$

il en résulte, en décomposant en fractions simples $\frac{F'(x)}{F(x)}$, et désignant, à cet effet, par $a, b,\ldots, l$ les n racines de l'équation $F(x)=0$, cette relation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x-a}+\left(\frac{\lambda}{x^{m+1}}+\frac{\lambda'}{x^{2n+2}}+\ldots\right).$$

Or il suffit maintenant de multiplier les deux membres par la fonction

$$\varphi(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots+k_nx^n+\ldots,$$

et d'égaler ensuite les termes en $\frac{1}{x}$ pour en conclure

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{n}\sum\varphi(a)+\mathrm{R},$$

si l'on pose

$$\mathrm{R}=\lambda k_{2n}+\lambda' k_{2n+1}+\ldots.$$

C'est la formule d'approximation pour l'intégrale que nous avions en vue; elle prend une autre forme qu'il importe de remarquer, en changeant de variable, et faisant $x=\cos\theta$. Effectivement on a alors

$$\mathrm{F}(x)=\cos n\theta,$$

d'où l'on voit que les racines $a, b, \ldots, l$ sont données par l'expression

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

pour $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$; nous obtiendrons, en conséquence,

$$\int_0^{\pi}\varphi(\cos\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k\,\varphi\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]+\pi\mathrm{R}.$$

Soit, comme application, l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta,$$

qui représente la moitié de la circonférence de l'ellipse $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$. En faisant $\sqrt{x^2+y^2}=f(\theta)$, et remarquant que $f(\pi-\theta)=f(\theta)$, on obtient facilement cette conséquence, que le périmètre de l'ellipse est donné approximativement par une circonférence de cercle, dont le rayon sera

Pour $n=2$........ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

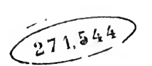
Pour $n=3$........ $\frac{1}{3}\left[f(0)+2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$,

Pour $n=4$........ $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$,

et ainsi de suite, l'erreur étant, en général, de l'ordre d'une puissance de l'excentricité égale à $2n$. En terminant, j'indiquerai, parmi plusieurs travaux intéressants sur la question des quadratures, le Mémoire de M. Christoffel, où a été donnée pour la première fois la détermination des constantes A, B,... : *Ueber die Gaussche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben* (*Journal de Crelle*, t. 55, p. 61) et celui de M. Mehler : *Bemerkungen zur Theorie der Mecanischen Quadraturen* (*Journal de Crelle*, t. 63, p. 152).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

(249) Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.


271,544

